

**Paolo Rocco**

**Dispense ad uso degli studenti del  
Politecnico di Milano  
per i corsi da cinque crediti didattici**

**Fondamenti di Automatica - 5 Cfu**

**Ingegneria delle Telecomunicazioni**

**Automatica**

**Ingegneria Aerospaziale**

**E' vietato l'uso commerciale di questo materiale**

## **Avvertenza**

Questa dispensa raccoglie, sotto forma di appunti sintetici, il materiale didattico per i corsi di Automatica da cinque crediti didattici tenuti dall'autore al Politecnico di Milano, nell'ambito del nuovo ordinamento didattico degli studi universitari.

Il lavoro vuole essere un ausilio agli studenti per rivedere i propri appunti o per un rapido ripasso della materia, ma non sostituisce, né vuole sostituire, almeno nella presente forma, un testo organico<sup>1</sup> sull'Automatica, al quale si raccomanda di fare riferimento per un apprendimento più consapevole della materia.

*Milano, Ottobre 2001*

---

<sup>1</sup> Si segnala in particolare il testo:

“Fondamenti di Controlli Automatici” di P.Bolzern, N.Schiavoni e R.Scattolini, Mc-Graw Hill Italia.

## **Sommario**

- Lezione 1: Introduzione**
- Lezione 2: Sistemi dinamici nel dominio del tempo**
- Lezione 3: Funzione di trasferimento**
- Lezione 4: Risposte canoniche dei sistemi del primo e secondo ordine**
- Lezione 5: Schemi a blocchi**
- Lezione 6: Risposta in frequenza**
- Lezione 7: Requisiti di un sistema di controllo**
- Lezione 8: Stabilità dei sistemi di controllo**
- Lezione 9: Prestazioni dinamiche dei sistemi di controllo**
- Lezione 10: Prestazioni statiche dei sistemi di controllo**
- Lezione 11: Progetto del controllore**
- Lezione 12: Regolatori PID**
- Lezione 13: Elementi di controllo digitale**

# *Lezione 1*

## Introduzione

## L'automatica

Con il termine automatica si fa riferimento ad una disciplina che studia tutti gli aspetti metodologici e concettuali che stanno alla base dell'**automazione**, ossia del trasferimento alle macchine di operazioni di governo e controllo di dispositivi, processi e sistemi di svariata natura. Si parla di automazione ogniqualvolta un'operazione viene eseguita da una macchina senza, o con ridotto, intervento dell'uomo.

I comparti applicativi in cui si presenta l'automazione sono i più svariati e toccano da vicino la vita quotidiana: si pensi agli elettrodomestici (frigoriferi, lavatrici, condizionatori), ai sistemi di frenatura e sterzo servoassistiti, alle sospensioni attive o al controllo della velocità di crociera nelle automobili, al pilota automatico negli aerei, ai processi manifatturieri automatizzati (fabbrica automatica), al controllo di motori elettrici, al controllo degli impianti per la generazione di energia, e così via.

Una tale vastità di applicazioni in cui l'automazione riveste un ruolo rilevante può far nascere il legittimo dubbio che l'automatica si riduca ad una rassegna o tutt'al più ad una classificazione delle applicazioni più significative.

In effetti inizialmente (al principio del ventesimo secolo) non vi era alcuna consapevolezza del carattere comune delle applicazioni di controllo. Le applicazioni, che pur esistevano (controllo di livello in serbatoi, controllo di velocità delle macchine a vapore, controllo del moto delle pale di mulini a vento), evolvevano in modo pionieristico e del tutto indipendente tra loro.

E' stato solo con il formarsi, e quindi con il consolidarsi, di una teoria matematica che l'automatica ha cominciato a prendere le forme di una disciplina scientifica. Tale teoria matematica va sotto il nome di **teoria dei sistemi**. Il suo indubbio pregio risiede nel fornire gli strumenti per lo studio delle caratteristiche del sistema, oggetto di automazione, in modo sostanzialmente indipendente dal contesto applicativo. Grazie alla teoria dei sistemi, tutti i sistemi di automazione elencati sommariamente in precedenza possono essere studiati con la stessa metodologia matematica.

Lo studio dei fondamenti della teoria dei sistemi, che occuperà la prima parte di questo corso, consentirà da un lato di dotarsi di strumenti molto efficaci per l'analisi di sistemi (non solo tecnologici, ma anche economici, ecologici o biologici) in cui è importante formalizzare l'evoluzione nel tempo delle variabili, dall'altro preparerà la strada allo studio dei sistemi di **controllo automatico**, che occuperà la seconda parte del corso. L'obiettivo primario dello studio sarà la valutazione oggettiva delle prestazioni dei sistemi di controllo, per mezzo di parametri che formalizzano concetti intuitivi, quali la stabilità, la velocità di risposta, la precisione del sistema di controllo. Saranno forniti anche elementi per la progettazione del dispositivo che esegue il controllo automatico e per la sua realizzazione in tecnologia digitale.

## Il problema del controllo

Un problema di controllo nasce nel momento in cui si vuole imporre ad un “oggetto” (la cui natura va di volta in volta precisata) un comportamento desiderato, per mezzo di opportune azioni esercitate sull’oggetto stesso. Operiamo la seguente distinzione:

*Controllo automatico:* l’azione di controllo viene esercitata da dispositivi che operano in modo autonomo senza, o con ridotto, intervento umano;

*Controllo manuale:* l’azione di controllo viene esercitata dall’operatore umano.

Quali sono gli elementi di un problema di controllo?

### A) Il sistema sotto controllo

E’ il sistema oggetto dell’azione di controllo. Su di esso agiscono delle *variabili manipolabili*, o *di controllo* ( $u$ ), e dei *disturbi* ( $d$ ) (variabili indipendenti ed incerte), mentre le sue uscite ( $y$ ) costituiscono le *variabili controllate* (di cui interessa cioè controllare l’andamento nel tempo).

### B) L’andamento desiderato delle variabili controllate

Sono le variabili ( $y^\circ$ ) che esprimono l’andamento che le variabili controllate dovrebbero assumere per garantire un corretto funzionamento del sistema controllato. Verranno anche chiamate *riferimenti* o *setpoint*.

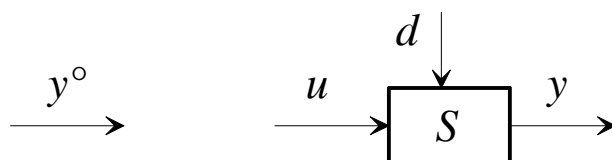


Fig. 1 : Elementi di un problema di controllo

**Problema di controllo:** determinare, ad ogni istante, il valore delle variabili di controllo  $u$  in modo tale che le variabili controllate  $y$  assumano un andamento quanto più possibile simile all’andamento desiderato  $y^\circ$ , qualunque siano, tra quelli ritenuti ragionevoli, gli andamenti dei riferimenti  $y^\circ$  e dei disturbi  $d$ .

**Controllore:** oggetto che determina ed esercita l’azione di controllo.

**Legge di controllo:** criterio secondo il quale agisce il controllore.

## Un esempio: il frigorifero

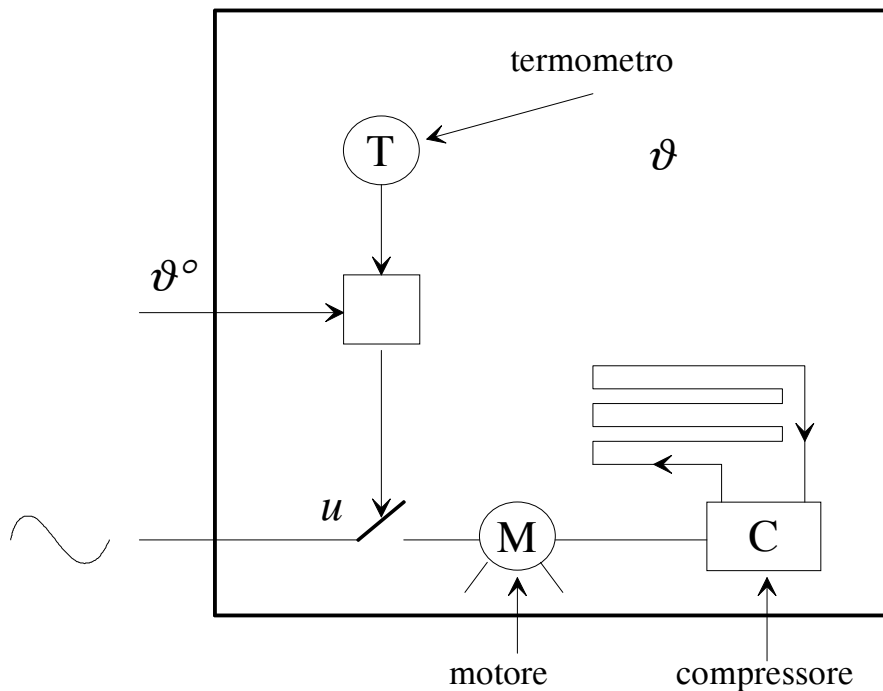


Fig. 2 : Un frigorifero

<b>Obiettivo del controllo:</b>	Mantenere approssimativamente costante la temperatura all'interno del frigo.
<b>Riferimento:</b>	$\vartheta^\circ$ valore desiderato per la temperatura all'interno del frigo (lo si imposta con una manopola).
<b>Variabile di controllo:</b>	$u$ posizione dell'interruttore di alimentazione del motore del compressore.
<b>Disturbi:</b>	$\vartheta_{d1}$ temperatura dell'ambiente esterno; $\vartheta_{d2}$ temperatura degli oggetti inseriti.
<b>Variabile controllata:</b>	$\vartheta$ temperatura all'interno del frigorifero (può essere misurata o no).

---

### STRATEGIA DI CONTROLLO 1

Si calcola la quantità di calore che deve essere estratta per mantenere una certa temperatura desiderata  $\vartheta^\circ$ . Servendosi di un timer, si accende e spegne il motore ad intervalli regolari.

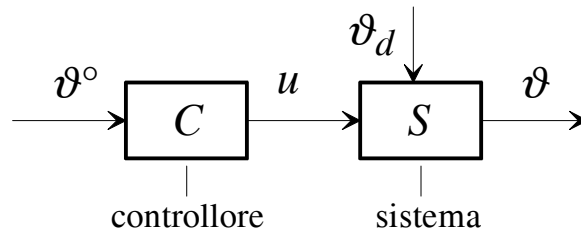


Fig. 3 : Strategia di controllo 1

Tipico andamento temporale della variabile di controllo  $u$ :

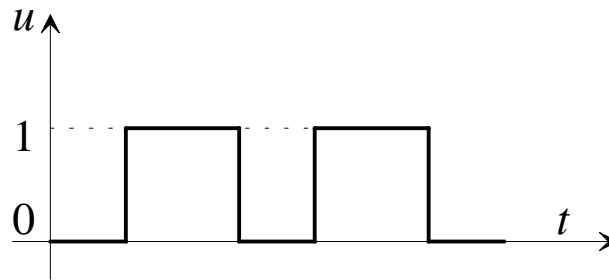


Fig. 4 : Posizione dell'interruttore

### Osservazioni

- La legge di controllo si basa esclusivamente sul modello (bilancio termico)
- Non è richiesto l'uso di un termometro
- Gli eventuali disturbi (porta del frigo lasciata a lungo aperta, oggetti inseriti particolarmente caldi, ecc.) compromettono l'efficacia della regolazione della temperatura.

### STRATEGIA DI CONTROLLO 2

Si utilizza la misura  $\vartheta^m$  della temperatura  $\vartheta$ , fornita da un termometro.

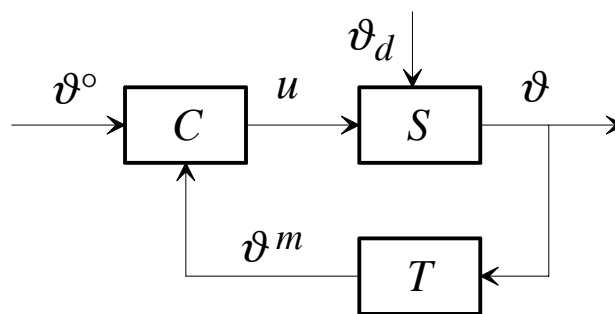


Fig. 5 : Strategia di controllo 2

Si alimenta il motore quando la differenza  $\vartheta^m - \vartheta^o$  supera una certa soglia e lo si spegne quando tale differenza scende al di sotto di un'altra soglia (controllo a *relè*).



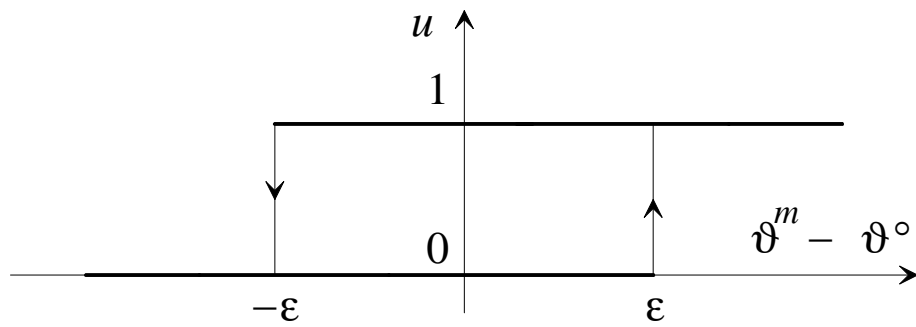


Fig. 6 : Controllore a relè

### Osservazioni

- La legge di controllo non si basa sul modello
- E' richiesto l'uso di un termometro
- In presenza di eventuali disturbi la temperatura viene comunque regolata efficacemente.

## Controllo in anello aperto ed in anello chiuso

### Controllo in anello aperto (feedforward control)

Non viene eseguita alcuna misura sulle variabili del sistema, oppure le eventuali variabili misurate, ed utilizzate nella legge di controllo, non dipendono dai valori assunti dalla variabile di controllo  $u$  (strategia 1 nell'esempio precedente).

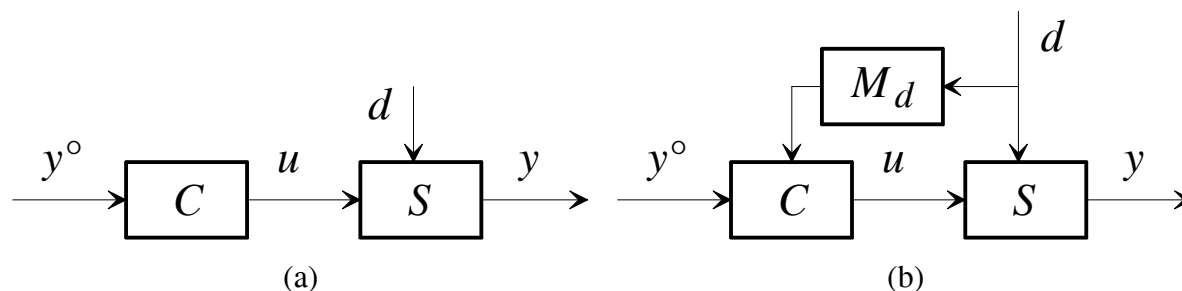


Fig. 7 : Schemi di controllo in anello aperto

Lo schema di Fig. 7b prende il nome di compensazione del disturbo: se il disturbo è misurabile, si esercita un'azione di controllo dipende dalla misura del disturbo stesso

### Controllo in anello chiuso (feedback control)

L'azione di controllo viene esercitata sulla base di misure di grandezze il cui valore dipende anche dal valore assunto dalla variabile  $u$  (strategia 2 nell'esempio precedente). In questo modo si viene a chiudere un anello nel rapporto di causa ed effetto tra le variabili (la variabile  $y$  dipende da  $u$  che, a sua volta, dipende da  $y$  ...).

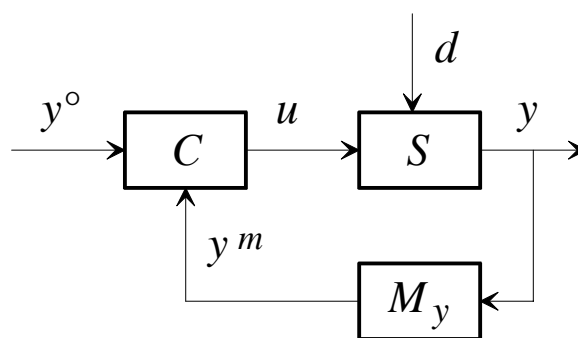


Fig. 8 : Schemi di controllo in anello chiuso

	Anello aperto	Anello chiuso
Misura di $y$	No	Sì
Modello matematico accurato	Sì	No
Sensibilità ai disturbi	Elevata	Bassa

## Strumentazione

La strumentazione è costituita dai dispositivi (trasduttore e attuatore) che interfacciano il processo sotto controllo con il controllore.

**Trasduttori:** misurano una grandezza fisica del sistema sotto controllo (tipicamente la variabile controllata) e ne inviano la misura al controllore in una forma compatibile con la sua tecnologia.

**Attuatori:** traducono l'azione di controllo determinata dal controllore in un'azione efficace sul sistema, operando sulle sue variabili manipolabili (tipicamente con stadi intermedi di amplificazione e conversione di potenza).

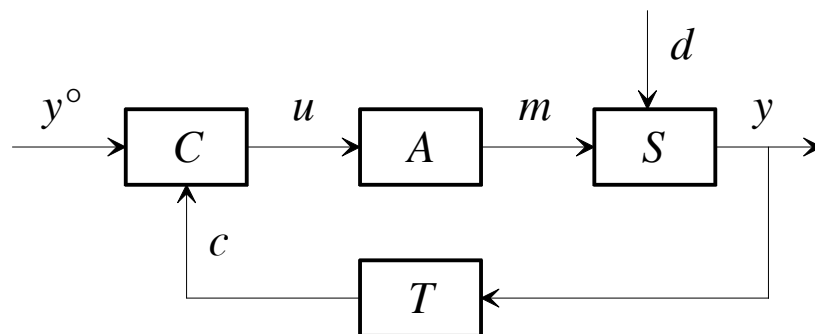


Fig. 9 : Schema di controllo completo di strumentazione

Si osservi che nello schema si è operata la distinzione tra la variabile di controllo  $u$  e la variabile manipolabile  $m$  e tra la variabile controllata  $y$  e la sua misura  $c$ .

## *Lezione 2*

# Sistemi dinamici nel dominio del tempo

## Un esempio: il nastro trasportatore<sup>1</sup>

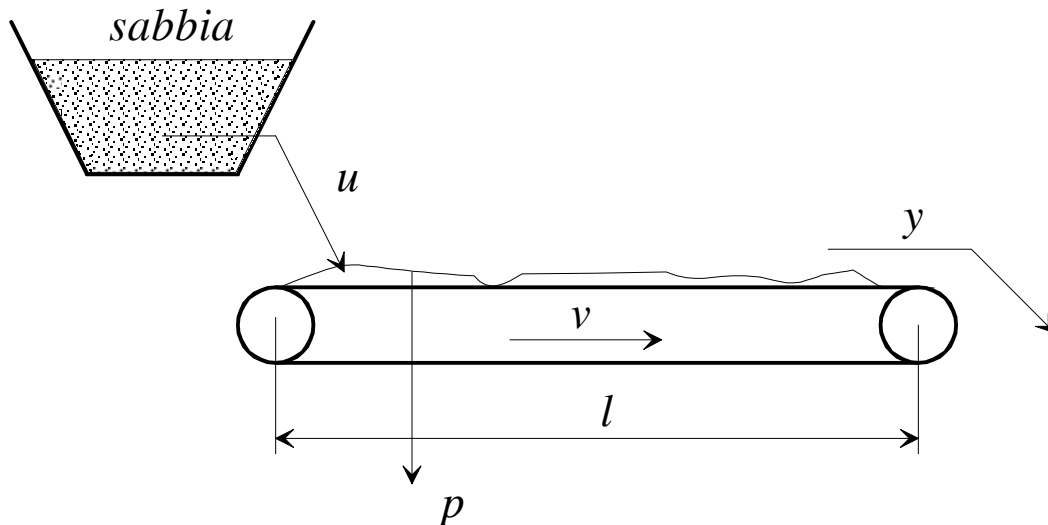


Fig. 1 : Un nastro trasportatore di sabbia

$u$ : portata di sabbia all'inizio del nastro

$y$ : portata di sabbia alla fine del nastro

$p$ : perdite di sabbia lungo il nastro

$v$ : velocità (costante) del nastro

$l$ : lunghezza del nastro

### **Problema di controllo**

Fare in modo che la portata  $y$  in uscita al nastro sia quanto più possibile simile ad un valore costante prefissato  $y^\circ$ , nonostante le perdite  $p$ , agendo sulla portata  $u$  di sabbia all'ingresso del nastro.

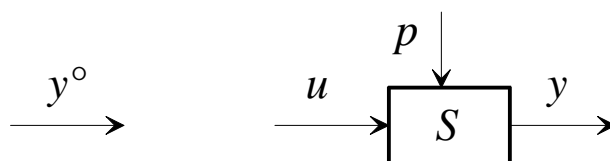


Fig. 2 : Il problema di controllo

### **Modello matematico**

Il modello matematico traduce in un'equazione il fatto che, ad ogni istante di tempo  $t$ , la portata in uscita uguaglia, a meno delle perdite, la portata manifestatasi in ingresso,  $\tau$  istanti prima, dove  $\tau$  è il tempo di percorrenza del nastro:

$$y(t) = u(t - \tau) - p(t), \quad \tau := l/v$$

---

<sup>1</sup>Da "Modellistica e Controllo", S. Bittanti, N. Schiavoni, CLUP, 1979.

Si suppone inoltre che le perdite siano calcolabili come la somma di un valore medio costante noto  $\bar{p}$  e di uno scostamento imprevedibile  $\Delta p$ :

$$p(t) = \bar{p} + \Delta p(t).$$

### **Strategia di controllo in anello aperto**

La più ovvia strategia di controllo in anello aperto consiste nell'imporre un valore di portata in ingresso costante, uguale alla somma del valore desiderato in uscita e del valore medio delle perdite:

$$u(t) = y^\circ + \bar{p}.$$

Risulta però:

$$y(t) = y^\circ + \bar{p} - (\bar{p} + \Delta p(t)) = y^\circ - \Delta p(t),$$

ossia:

$$y^\circ - y(t) = \Delta p(t).$$

Pertanto il sistema di controllo è completamente "indifeso" rispetto al disturbo  $\Delta p$  (tutto il disturbo si traduce in errore).

### **Strategia di controllo in anello chiuso**

Se la portata in uscita è misurabile, si somma alla precedente azione di controllo in anello aperto un termine correttivo, proporzionale all'errore tra valore desiderato ed effettivo di  $y$ :

$$u(t) = y^\circ + \bar{p} + \mu(y^\circ - y(t)),$$

dove  $\mu$  è un parametro di progetto.

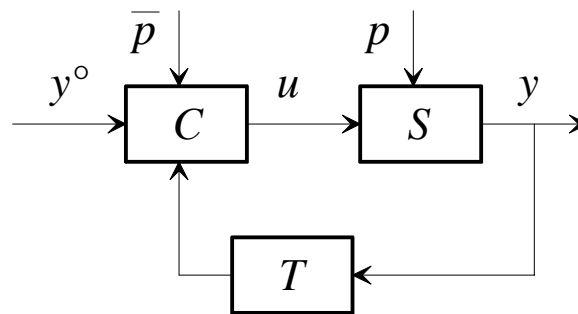


Fig. 3 : Strategia di controllo in anello chiuso

Risulta allora:

$$y(t) = y^\circ + \bar{p} + \mu(y^\circ - y(t - \tau)) - (\bar{p} + \Delta p(t)) = (1 + \mu)y^\circ - \mu y(t - \tau) - \Delta p(t).$$

Studiamo anzitutto il comportamento a regime (*analisi statica*), supponendo costanti le perdite ( $\Delta p(t) = \Delta \bar{p}$ ). Tutte le variabili risulteranno allora costanti, ed in particolare si avrà:

$$y(t) = y(t - \tau) = \bar{y}.$$

Facendo i conti si ottiene:

$$y^{\circ} - \bar{y} = \frac{\Delta \bar{p}}{1 + \mu}$$

Sembra quindi che pur di scegliere il parametro  $\mu$  positivo sufficientemente grande, si possa ridurre arbitrariamente l'errore.

Il problema è risolto? Non proprio...

Studiamo un *transitorio*, ossia il passaggio da una condizione di regime ad un'altra (*analisi dinamica*). In particolare, ipotizziamo che l'andamento nel tempo delle perdite sia rappresentato dal grafico di Fig. 4.



Fig. 4 : Andamento temporale delle perdite di sabbia

Facendo i conti, si trova che il parametro  $\mu$  influenza pesantemente l'andamento temporale della portata in uscita  $y$ , come mostrano i seguenti grafici:

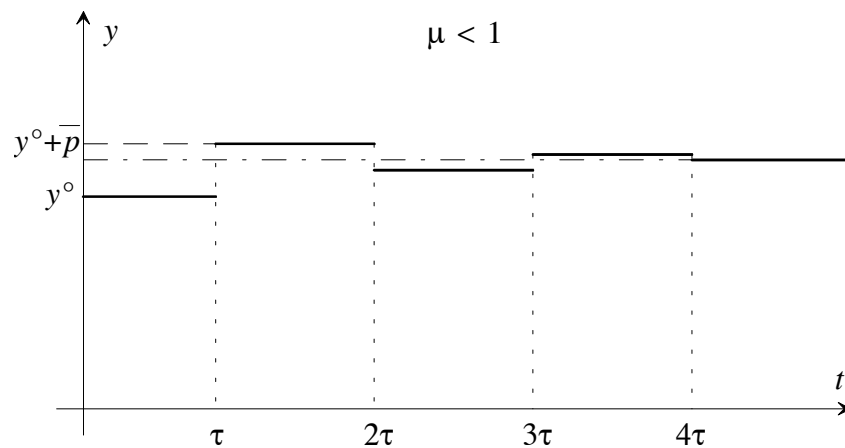


Fig. 5 : Andamento temporale della portata in uscita:  $\mu < 1$

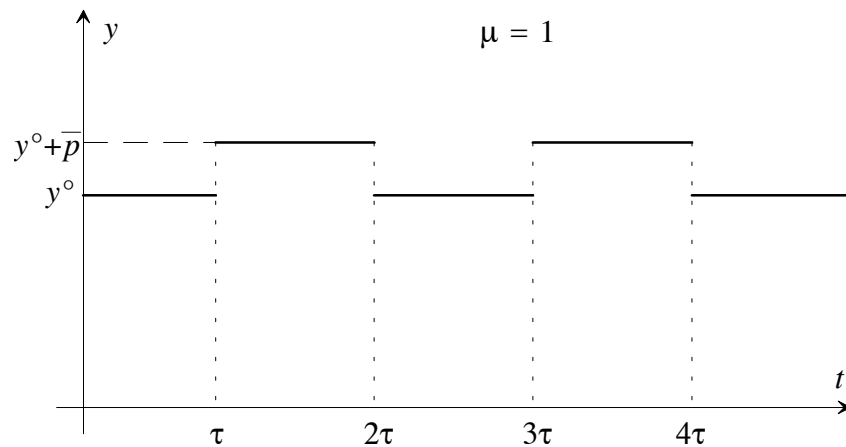


Fig. 6 : Andamento temporale della portata in uscita:  $\mu=1$

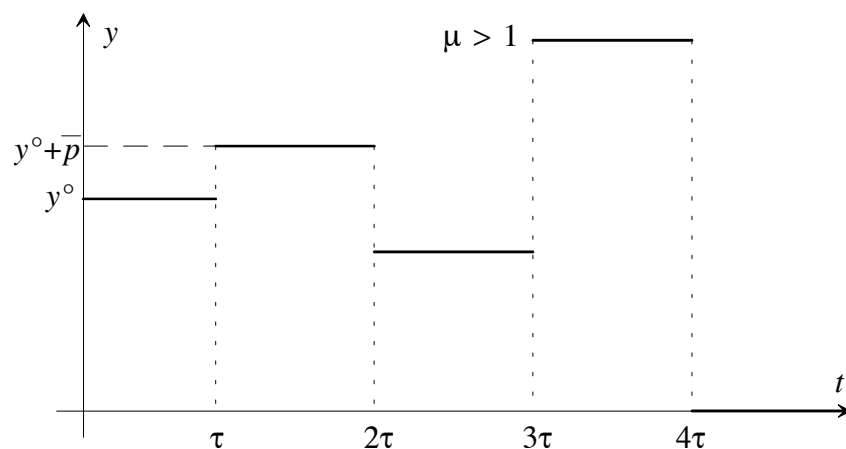


Fig. 7 : Andamento temporale della portata in uscita:  $\mu>1$

Tipo di transitorio	
$\mu < 1$	Oscillazioni convergenti (*)
$\mu = 1$	Oscillazioni permanenti
$\mu > 1$	Oscillazioni divergenti

(\*) Si può dimostrare che le oscillazioni convergono al valore  $y^o + \bar{p}/(1+\mu)$ , coerente con l'analisi statica, tenendo conto che nel nuovo punto di equilibrio  $\Delta\bar{p} = -\bar{p}$ .

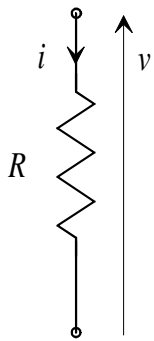
### Conclusioni

- L'analisi statica non è sufficiente per lo studio delle prestazioni dei sistemi di controllo. A volte (vedi i casi  $\mu=1$  e  $\mu>1$ ) può dare risultati addirittura errati.
- E' allora indispensabile un'analisi dinamica del sistema di controllo.
- Un modello matematico che descrive l'evoluzione nel tempo delle variabili del sistema prende il nome di *modello dinamico*.
- Lo strumento matematico che useremo per formulare i modelli matematici sarà quello delle *equazioni differenziali*.



# Modelli dinamici di sistemi elementari

## Resistore



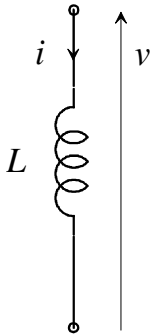
$R$ : resistenza

$i$ : corrente

$v$ : tensione

$$v(t) = Ri(t)$$

## Induttore



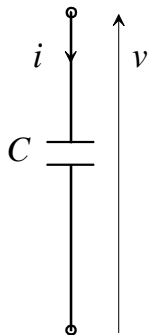
$L$ : induttanza

$i$ : corrente

$v$ : tensione

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

## Condensatore



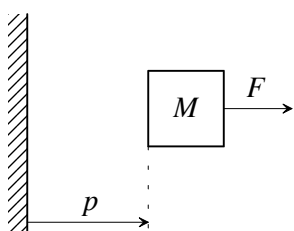
$C$ : capacità

$i$ : corrente

$v$ : tensione

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

## Massa



$M$ : massa

$p$ : posizione

$v$ : velocità

$a$ : accelerazione

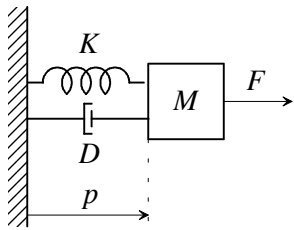
$F$ : forza

$$v(t) = \frac{dp(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$F(t) = Ma(t)$$

### Oscillatore meccanico



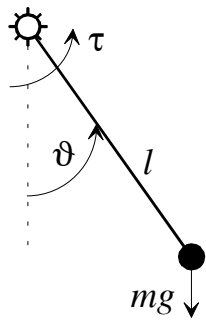
$M$ : massa  
 $K$ : costante elastica  
 $D$ : coefficiente di attrito  
 $p$ : posizione  
 $v$ : velocità  
 $a$ : accelerazione  
 $F$ : forza

$$v(t) = \frac{dp(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$F(t) = Kp(t) + Dv(t) + Ma(t)$$

### Pendolo



$l$ : lunghezza dell'asta (priva di massa)  
 $m$ : massa concentrata  
 $g$ : accelerazione di gravità  
 $\vartheta$ : posizione angolare  
 $\omega$ : velocità angolare  
 $\alpha$ : accelerazione angolare

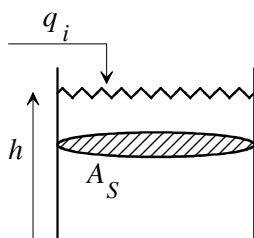
$$\omega(t) = \frac{d\vartheta(t)}{dt}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$\tau(t) = ml^2\alpha(t) + mgl \sin(\vartheta(t))$$

$\tau$ : coppia

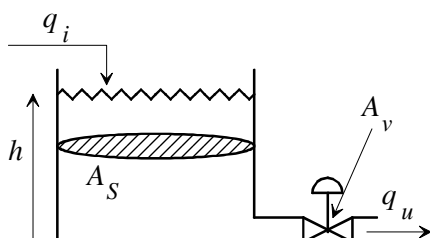
### Serbatoio cilindrico



$A_S$ : area sezione serbatoio  
 $h$ : livello liquido  
 $q_i$ : portata di liquido entrante

$$q_i(t) = A_S \frac{dh(t)}{dt}$$

### Serbatoio cilindrico con valvola d'efflusso



$A_S$ : area sezione serbatoio  
 $A_v$ : area di efflusso della valvola  
 $k$ : coefficiente caratteristico della valvola  
 $h$ : livello liquido  
 $q_i$ : portata di liquido entrante

$$q_i(t) = A_S \frac{dh(t)}{dt} + kA_v \sqrt{h(t)}$$

## Sistemi dinamici

Un sistema dinamico si interfaccia con il “resto del mondo” per mezzo di una serie di variabili, che definiremo di ingresso, ed altre che definiremo di uscita.

Definiamo di ingresso le variabili che influenzano il comportamento del sistema, di uscita quelle che caratterizzano il sistema e sulle quali soffermiamo il nostro interesse (tipicamente perché costituiscono l’obiettivo del controllo).

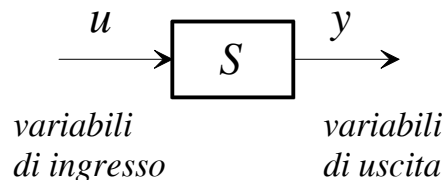


Fig. 8 : Ingressi e uscite di un sistema

La relazione che sussiste tra variabili di ingresso e di uscita è di causa-effetto e non ha nulla a che vedere con relazioni di afflusso ed efflusso di materia o energia (la portata di uscita in un serbatoio può essere variabile di ingresso per il sistema, se per esempio è comandata da una pompa).

E' sufficiente descrivere il comportamento dinamico di un sistema mediante relazioni algebriche tra i suoi ingressi e le sue uscite? Quasi sempre no (nei nostri esempi, solo per il resistore), per due motivi: occorre conoscere i valori assunti dalle variabili di ingresso a partire dall'istante iniziale ed occorre conoscere una o più condizioni iniziali.

Consideriamo a titolo di esempio il condensatore, in cui l'ingresso è costituito dalla corrente ( $u(t) = i(t)$ ), l'uscita dalla tensione ( $y(t) = v(t)$ ). Avremo quindi:

$$C\dot{y}(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = y(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau .$$

Occorre quindi conoscere il valore iniziale della tensione e l'andamento della corrente dall'istante iniziale. Il numero minimo di condizioni iniziali che occorre assegnare per determinare tutte le uscite del sistema, noti gli andamenti degli ingressi a partire dall'istante iniziale, prende il nome di *ordine* del sistema: lo indicheremo con  $n$ .

Per descrivere l'evoluzione dinamica del sistema è quindi sufficiente assegnare, istante per istante,  $n$  valori, ovvero dare l'andamento nel tempo di  $n$  variabili: indicheremo con  $x_1, x_2, \dots, x_n$  queste variabili e le definiremo **variabili di stato**.

Note le variabili di stato ad un dato istante e l'andamento degli ingressi da quell'istante in poi, sarà quindi possibile determinare l'andamento di tutte le uscite dall'istante considerato. La formalizzazione matematica del sistema dinamico passa allora per la scrittura delle equazioni differenziali di cui le variabili di stato sono le soluzioni, noti gli ingressi esterni, e del legame tra le variabili di uscita e quelle di stato e di ingresso.

Sia  $m$  il numero delle variabili di ingresso e  $p$  il numero di variabili di uscita:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\
 \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))
 \end{aligned} \right\} \text{equazioni di stato}$$

$$\left. \begin{aligned}
 y_1(t) &= g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\
 y_2(t) &= g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\
 &\vdots \\
 y_p(t) &= g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t))
 \end{aligned} \right\} \text{trasformazioni di uscita}$$

Queste sono le equazioni di un **sistema dinamico**.

Introduciamo i vettori:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}.$$

e le funzioni vettoriali:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \begin{bmatrix} g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ g_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \\ \vdots \\ g_p(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \end{bmatrix}$$

Possiamo riscrivere le equazioni del sistema dinamico in forma compatta vettoriale:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\
 \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))
 \end{aligned}$$

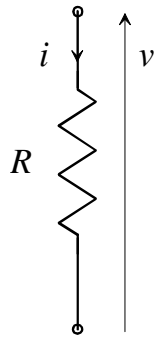
Si osservi che il sistema è *tempo invariante* ossia le equazioni del sistema non si modificano nel tempo: ciò comporta che la scelta dell'asse dei tempi è del tutto convenzionale, ossia che come istante iniziale sarà sempre possibile scegliere l'istante  $t=0$ .

Definiremo poi come sistemi *SISO* (Single Input Single Output) i sistemi per cui  $m=p=1$ , *MIMO* (Multiple Input Multiple Output) gli altri.

Infine si dirà *strettamente proprio* un sistema in cui la funzione  $\mathbf{g}$  non dipende dall'ingresso  $\mathbf{u}$ , genericamente proprio un sistema in cui ciò non accade.

Torniamo ai nostri esempi:

### Resistore



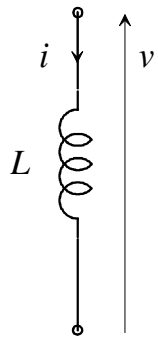
ingresso:  $u = v$

uscita:  $y = i$

variabili di stato: nessuna

$$y(t) = \frac{1}{R}u(t)$$

### Induttore



ingresso:  $u = v$

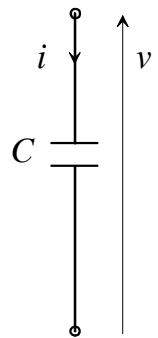
uscita:  $y = i$

variabili di stato:  $x_1 = i$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Condensatore



ingresso:  $u = i$

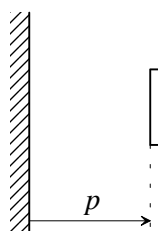
uscita:  $y = v$

variabili di stato:  $x_1 = v$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Massa



ingresso:  $u = F$

uscita:  $y = p$

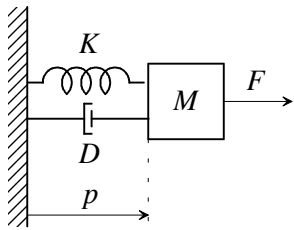
variabili di stato:  $x_1 = p, x_2 = v$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Oscillatore meccanico



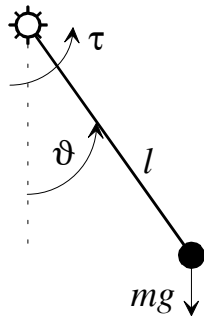
ingresso:  $u = F$   
 uscita:  $y = p$   
 variabili di stato:  $x_1 = p, x_2 = v$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}(-Kx_1(t) - Dx_2(t) + u(t))$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Pendolo



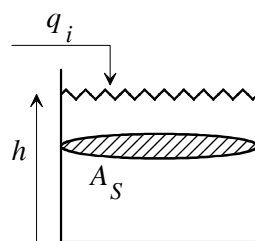
ingresso:  $u = \tau$   
 uscita:  $y = \vartheta$   
 variabili di stato:  $x_1 = \vartheta, x_2 = \omega$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) + \frac{1}{ml^2} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Serbatoio cilindrico

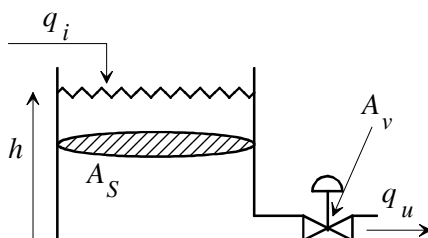


ingresso:  $u = q_i$   
 uscita:  $y = h$   
 variabili di stato:  $x_1 = h$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{A_S} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### Serbatoio cilindrico con valvola d'efflusso



ingresso:  $u = q_i$   
 uscita:  $y = h$   
 variabili di stato:  $x_1 = h$

$$\dot{x}_1(t) = -k \frac{A_v}{A_S} \sqrt{x_1(t)} + \frac{1}{A_S} u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Gli esempi evidenziano che, di norma, le variabili di stato sono associate a fenomeni di accumulo (di energia elettrica, di energia potenziale, di energia cinetica, di massa...).

## Sistemi dinamici lineari

Nei sistemi dinamici lineari le equazioni di stato e le trasformazioni di uscita sono lineari nelle variabili di stato e nelle variabili di ingresso:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + b_{12}u_2(t) + \dots + b_{1m}u_m(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + b_{22}u_2(t) + \dots + b_{2m}u_m(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + b_{n2}u_2(t) + \dots + b_{nm}u_m(t)
 \end{aligned} \right\} \text{equazioni di stato}$$
  

$$\left. \begin{aligned}
 y_1(t) &= c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) + d_{11}u_1(t) + d_{12}u_2(t) + \dots + d_{1m}u_m(t) \\
 y_2(t) &= c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \dots + c_{2n}x_n(t) + d_{21}u_1(t) + d_{22}u_2(t) + \dots + d_{2m}u_m(t) \\
 &\vdots \\
 y_p(t) &= c_{p1}x_1(t) + c_{p2}x_2(t) + \dots + c_{pn}x_n(t) + d_{p1}u_1(t) + d_{p2}u_2(t) + \dots + d_{pm}u_m(t)
 \end{aligned} \right\} \text{trasformazioni di uscita}$$

Introduciamo le matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}$$
  

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

Il sistema dinamico lineare potrà allora essere riscritto in forma compatta vettoriale come segue:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\
 \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)
 \end{aligned}$$

Tutti i precedenti esempi sono descritti da sistemi dinamici lineari, tranne il pendolo (a causa della funzione trigonometrica) ed il serbatoio con valvola di efflusso (per via della radice quadrata).

## Movimento

In un sistema dinamico il movimento (o moto) dello stato è definito come l'evoluzione nel tempo del vettore delle variabili di stato, a partire da un istante iniziale in cui sia dato il valore dello stato stesso, e noti gli andamenti degli ingressi da quell'istante in poi. Analoga definizione si dà per il movimento dell'uscita. Di fatto quindi il movimento dello stato costituisce la soluzione del sistema di equazioni differenziali che forma il sistema dinamico.

Per un sistema dinamico **lineare**, il movimento dello stato e quello d'uscita sono scomponibili in due termini: moto libero e moto forzato. Il moto libero dipende solo dalla condizione iniziale sullo stato del sistema (e non dagli ingressi), il moto forzato dipende solo dagli ingressi (e non dalla condizione iniziale):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_l(t) + \mathbf{x}_f(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_l(t) + \mathbf{y}_f(t)$$

Considerando per semplicità un sistema del primo ordine ( $n = 1$ ), con un ingresso ed un'uscita ( $m = p = 1$ ):

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$y(t) = cx(t) + du(t)$$

(in cui tutte le variabili sono quindi scalari) è facile verificare che il moto libero ed il moto forzato assumono le seguenti espressioni:

### Moto libero

$$x_l(t) = e^{at} x_0$$

$$y_l(t) = ce^{at} x_0$$

### Moto forzato

$$x_f(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau$$

$$x_f(t) = \int_0^t ce^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + du(t)$$

Le formule possono essere generalizzate (“formula di Lagrange”) a sistemi di ordine superiore e con più ingressi e/o uscite, introducendo il concetto di esponenziale di matrice.



## Sovrapposizione degli effetti

Si consideri un sistema dinamico **lineare**.

Si eseguano sul sistema tre esperimenti:

1. Lo stato iniziale valga  $\mathbf{x}'_0$  e si assegni l'ingresso  $\mathbf{u}'(t)$ , per  $t \geq 0$ .

Siano  $\mathbf{x}'(t)$  e  $\mathbf{y}'(t)$  i corrispondenti movimenti di stato e uscita.

2. Lo stato iniziale valga  $\mathbf{x}''_0$  e si assegni l'ingresso  $\mathbf{u}''(t)$ , per  $t \geq 0$ .

Siano  $\mathbf{x}''(t)$  e  $\mathbf{y}''(t)$  i corrispondenti movimenti di stato e uscita.

3. Lo stato iniziale valga  $\mathbf{x}'''_0 = \alpha\mathbf{x}'_0 + \beta\mathbf{x}''_0$  e si assegni l'ingresso  $\mathbf{u}'''(t) = \alpha\mathbf{u}'(t) + \beta\mathbf{u}''(t)$ , per  $t \geq 0$ , essendo  $\alpha$  e  $\beta$  due arbitrari numeri reali.

Siano  $\mathbf{x}'''(t)$  e  $\mathbf{y}'''(t)$  i corrispondenti movimenti di stato e uscita.

Il principio di sovrapposizione degli effetti, valido solo per sistemi **lineari**, afferma che:

$$\mathbf{x}'''(t) = \alpha\mathbf{x}'(t) + \beta\mathbf{x}''(t) ,$$

$$\mathbf{y}'''(t) = \alpha\mathbf{y}'(t) + \beta\mathbf{y}''(t) .$$

E' quindi possibile studiare separatamente l'effetto sul moto delle cause (stato iniziale e differenti ingressi) che lo generano, e quindi sovrapporre (combinare linearmente) gli effetti.

## Equilibrio

Si supponga che l'ingresso (o gli ingressi) del sistema dinamico (lineare o no) siano costanti. Un punto di equilibrio è caratterizzato dal fatto che tutte le variabili di stato (e quindi anche la variabile di uscita) del sistema rimangono costanti nel tempo.

Consideriamo l'equazione di stato (vettoriale):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

ed assumiamo l'ingresso costante:  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$ .

Se il sistema si trova all'equilibrio,  $\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ , e la derivata di  $\mathbf{x}$  è nulla. Pertanto:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

Questa equazione, nell'incognita  $\bar{\mathbf{x}}$ , consente di trovare il punto di equilibrio del sistema. La corrispondente *uscita di equilibrio* sarà data da:

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}).$$

Non è detto che lo stato di equilibrio esista e, se esiste, non è detto che sia unico.

### Esempio

Si consideri il sistema, non lineare, del secondo ordine:

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2$$

$$y = x_1 x_2 + \sqrt{u}$$

Si vogliono individuare eventuali punti di equilibrio in corrispondenza dell'ingresso costante  $\mathbf{u}(t) = \bar{u} = 1$ .

Annullando le derivate si ottiene:

$$\bar{x}_1^3 + 1 = 0$$

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2^2 = 0$$

Dalla prima equazione si ricava, come unica soluzione reale,  $\bar{x}_1 = -1$ , che, sostituita nella seconda, comporta le due soluzioni:  $\bar{x}_2 = -1$  e  $\bar{x}_2 = 1$ .

Pertanto il sistema soggetto all'ingresso costante assegnato ammette due punti di equilibrio:

$$(\bar{x}_1 = -1; \bar{x}_2 = -1), (\bar{x}_1 = -1; \bar{x}_2 = 1).$$

In corrispondenza del primo punto di equilibrio l'uscita di equilibrio vale:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sqrt{\bar{u}} = 2$$

mentre in corrispondenza del secondo:

$$\bar{y} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \sqrt{\bar{u}} = 0.$$

## Linearizzazione

Considerando *piccoli scostamenti* delle variabili attorno a valori di equilibrio, è possibile approssimare il comportamento di un sistema dinamico non lineare con quello di un sistema dinamico lineare.

Consideriamo un generico sistema non lineare in forma vettoriale:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$$

soggetto all'ingresso costante  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}$ . Supponiamo che esista il punto di equilibrio (eventualmente non unico) caratterizzato dal valore  $\bar{\mathbf{x}}$  delle variabili di stato e dal valore  $\bar{\mathbf{y}}$  dell'uscita di equilibrio.

Per definizione di equilibrio sarà quindi:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}.$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}).$$

Si supponga ora che lo stato iniziale (all'istante  $t=0$ ) sia costituito dal valore di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}$  cui si somma un piccolo scostamento:

$$\mathbf{x}_0 = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}_0,$$

e che, a partire dall'istante iniziale, l'ingresso si possa esprimere come la somma del valore all'equilibrio e di un piccolo scostamento:

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}(t), \quad t \geq 0.$$

E' senz'altro lecito esprimere anche i movimenti di stato e uscita che ne conseguono come somma dei valori di equilibrio e di scostamenti:

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{y}} + \delta\mathbf{y}(t).$$

Essendo le espressioni precedenti movimenti del sistema devono soddisfarne le equazioni. Si ottiene quindi:

$$\dot{\delta\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}(t))$$

$$\delta\mathbf{x}(0) = \delta\mathbf{x}_0$$

$$\bar{\mathbf{y}} + \delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}(t))$$

Il **sistema linearizzato** si ottiene sviluppando in serie di Taylor intorno al punto di equilibrio le equazioni di stato e le trasformazioni di uscita del sistema originario ed arrestando lo sviluppo ai termini di primo grado. Nello sviluppo compariranno le derivate parziali delle funzioni vettoriali  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  rispetto agli argomenti vettoriali  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  (matrici Jacobiane), valutate nel punto di equilibrio:

$$\dot{\delta \mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta \mathbf{u}(t)$$

$$\delta \mathbf{x}(0) = \delta \mathbf{x}_0$$

$$\bar{\mathbf{y}} + \delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \delta \mathbf{u}(t)$$

Ponendo ora:

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}},$$

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}}, \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}},$$

e ricordando le relazioni valide tra le variabili che caratterizzano l'equilibrio, otteniamo:

$$\dot{\delta \mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \delta \mathbf{u}(t)$$

$$\delta \mathbf{x}(0) = \delta \mathbf{x}_0$$

$$\delta \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \delta \mathbf{u}(t),$$

che è un sistema lineare.

Per il sistema linearizzato valgono quindi le proprietà dei sistemi lineari (non valide per il sistema non lineare di partenza), limitatamente a piccole variazioni intorno alla condizione di equilibrio.

### **Esempio**

Si consideri nuovamente il sistema del secondo ordine:

$$\dot{x}_1 = x_1^3 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2$$

$$y = x_1 x_2 + \sqrt{u}$$

Si vogliono determinare le espressioni dei sistemi linearizzati intorno ai due punti di equilibrio corrispondenti all'ingresso costante  $u(t) = \bar{u} = 1$ .

Abbiamo già calcolato i due punti di equilibrio:

$$(\bar{x}_1 = -1, \bar{x}_2 = -1), (\bar{x}_1 = -1, \bar{x}_2 = 1).$$

Le equazioni del sistema linearizzato sono le seguenti:

$$\delta\dot{x}_1 = 3\bar{x}_1^2\delta x_1 + \delta u$$

$$\delta\dot{x}_2 = \delta x_1 + 2\bar{x}_2\delta x_2 \quad .$$

$$\delta y = \bar{x}_2\delta x_1 + \bar{x}_1\delta x_2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u}} \delta u$$

In particolare, il sistema linearizzato intorno al primo punto di equilibrio risulta:

$$\delta\dot{x}_1 = 3\delta x_1 + \delta u$$

$$\delta\dot{x}_2 = \delta x_1 - 2\delta x_2 \quad ,$$

$$\delta y = -\delta x_1 - \delta x_2 + \frac{1}{2}\delta u$$

mentre quello linearizzato intorno al secondo punto:

$$\delta\dot{x}_1 = 3\delta x_1 + \delta u$$

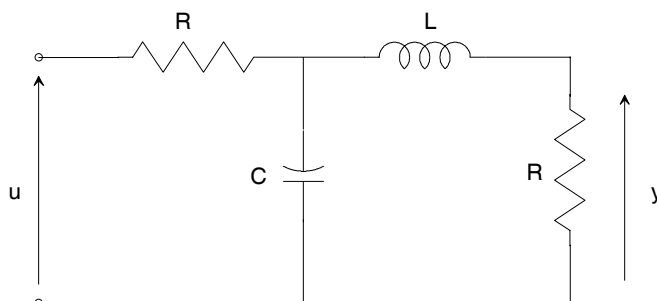
$$\delta\dot{x}_2 = \delta x_1 + 2\delta x_2 \quad .$$

$$\delta y = \delta x_1 - \delta x_2 + \frac{1}{2}\delta u$$

## Esercizi

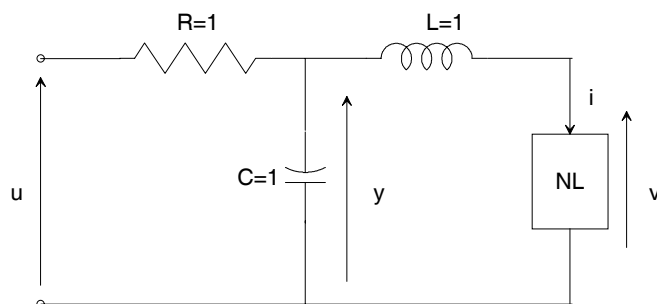
### Esercizio 2.1

Scrivere le equazioni che descrivono (nel dominio del tempo) il comportamento dinamico della rete elettrica di figura:



### Esercizio 2.2

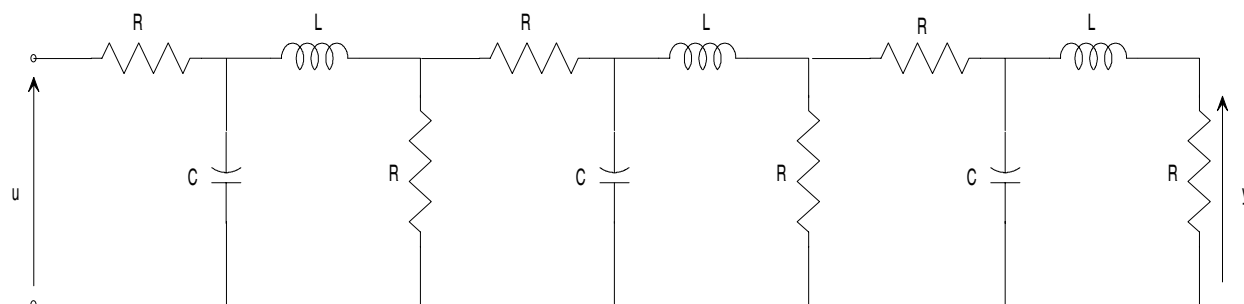
Scrivere le equazioni che descrivono (nel dominio del tempo) il comportamento dinamico della rete elettrica di figura:



dove il blocco  $NL$  impone la relazione  $v = i^3$  tra la corrente  $i$  che lo percorre e la tensione  $v$  ai suoi capi.

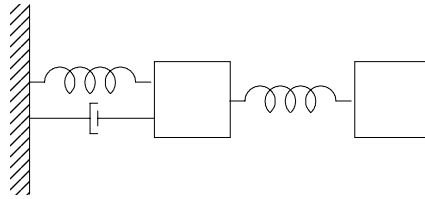
### Esercizio 2.3

Senza scriverne le equazioni, si dica di che ordine è il sistema dinamico che descrive la rete elettrica di figura:



### Esercizio 2.4

Senza scriverne le equazioni, si dica di che ordine è il sistema dinamico che descrive il sistema meccanico di figura:



### Esercizio 2.5

Con riferimento al sistema dinamico:

$$\dot{x}_1(t) = -x_1^2(t) + x_2(t) + u(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t)$$

$$y(t) = x_1(t)x_2(t)$$

si calcoli il punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante  $u = \bar{u} = 2$ , e si scrivano le equazioni del sistema linearizzato intorno a tale punto di equilibrio.

### Esercizio 2.6

Con riferimento al sistema dinamico:

$$\dot{x}(t) = \frac{x(t) - 1}{u(t)}$$

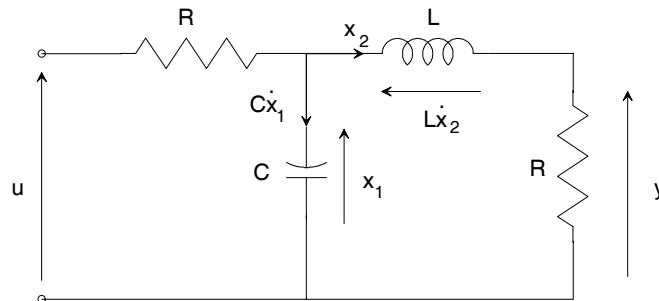
$$y(t) = x(t)$$

si calcoli il punto di equilibrio corrispondente all'ingresso costante  $u = \bar{u} = 1$ , e si scrivano le equazioni del sistema linearizzato intorno a tale punto di equilibrio.

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 2.1

Dette  $x_1$  la tensione sul condensatore e  $x_2$  la corrente nell'induttore:



si scrivono le leggi delle tensioni alle due maglie:

$$x_1 = L\dot{x}_2 + Rx_2$$

$$u = x_1 + R(x_2 + C\dot{x}_1)$$

da cui si ricavano le equazioni del sistema dinamico:

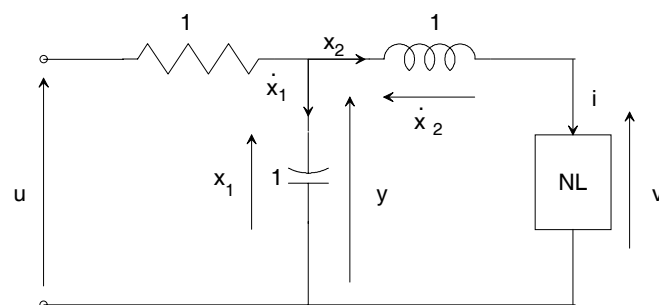
$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 - \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{RC}u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$

$$y = Rx_2$$

### Esercizio 2.2

Dette  $x_1$  la tensione sul condensatore e  $x_2$  la corrente nell'induttore:



si scrivono le leggi delle tensioni alle due maglie:

$$x_1 = \dot{x}_2 + x_2^3$$

$$u = x_1 + (x_2 + \dot{x}_1)$$

da cui si ricavano le equazioni del sistema dinamico:



$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2^3$$

$$y = x_1$$

### ***Esercizio 2.3***

Poiché sono presenti 6 elementi di accumulo di energia (condensatori ed induttori), il sistema è di ordine 6.

### ***Esercizio 2.4***

Poiché sono presenti 2 masse (ciascuna delle quali costituisce un sistema del secondo ordine) il sistema è di ordine 4.

### ***Esercizio 2.5***

Annullando le derivate e ponendo  $u = \bar{u} = 2$ , si ottiene:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = -2,$$

da cui seguono le equazioni del sistema linearizzato:

$$\delta\dot{x}_1(t) = \delta x_2(t) + \delta u(t)$$

$$\delta\dot{x}_2(t) = \delta x_1(t)$$

$$\delta y(t) = -2\delta x_1(t)$$

### ***Esercizio 2.6***

Annullando la derivata e ponendo  $u = \bar{u} = 1$ , si ottiene:

$$\bar{x} = 1,$$

da cui seguono le equazioni del sistema linearizzato:

$$\delta\dot{x}(t) = \delta x(t)$$

$$\delta y(t) = \delta x(t)$$

## *Lezione 3*

# Funzione di trasferimento

## Calcolo della risposta di un sistema dinamico lineare

Per il calcolo della risposta (uscita) di un sistema dinamico **lineare** soggetto ad ingressi assegnati, si possono seguire due strade.

### Calcolo nel “dominio del tempo”

Con i metodi dell’analisi matematica, si integra il sistema di equazioni differenziali (equazioni di stato) forzato dalle funzioni del tempo assegnate (gli ingressi). Dalla trasformazione di uscita si ricava quindi l’espressione dell’uscita.

### Calcolo nel “dominio delle trasformate”

Alla funzione del tempo  $u(t)$  si associa, con i metodi matematici che vedremo, una funzione  $U$  che prende il nome di **trasformata** del segnale<sup>1</sup> di ingresso. Dalle equazioni del sistema dinamico è poi possibile ricavare facilmente il legame tra la trasformata  $U$  e la trasformata  $Y$  del segnale di uscita. Ricavata quindi la trasformata  $Y$ , le si associa la funzione del tempo  $y(t)$ , che ne costituisce l’**antitrasformata**, e che rappresenta la risposta del sistema cercata.

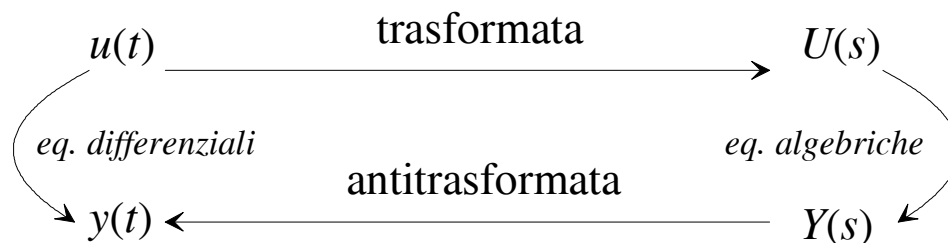


Fig. 1 : Calcolo della risposta di un sistema dinamico lineare

Qual è il vantaggio del metodo di calcolo nel dominio delle trasformate ?

Il vantaggio, notevolissimo, è che il legame tra la trasformata dell’ingresso e la trasformata dell’uscita è di natura **algebraica e non differenziale**, come accade invece tra le rispettive funzioni del tempo.

---

<sup>1</sup>Con il termine “segnale” intendiamo una variabile, scalare, funzione del tempo.

## Trasformata di Laplace

Si consideri una funzione reale  $f(t)$  della variabile reale  $t$ , definita per  $t \geq 0$ .

La funzione della **variabile complessa**  $s$ :

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

si dice **trasformata di Laplace** di  $f(t)$  e si indica con  $\mathcal{L}[f(t)]$ . La trasformata esiste, in generale, solo per un insieme di valori di  $s$ .

### Esempio

Si consideri la funzione **scalino**:

$$f(t) = \text{sca}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

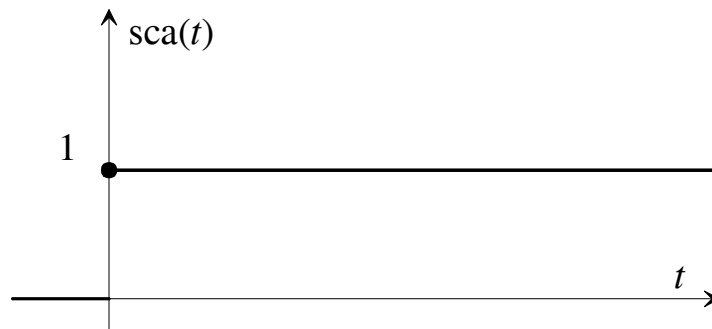


Fig. 2 : La funzione scalino

$$\mathcal{L}[\text{sca}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Si noti che l'ultima eguaglianza è vera quando  $s$  è un numero complesso a parte reale positiva (cioè nel semipiano destro del piano complesso).

### Esempio

Si consideri la funzione **impulso**:

$$f(t) = \text{imp}(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$

Tale funzione può essere vista come il limite, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , della seguente funzione:

$$f_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 0 & t > \varepsilon \end{cases}$$

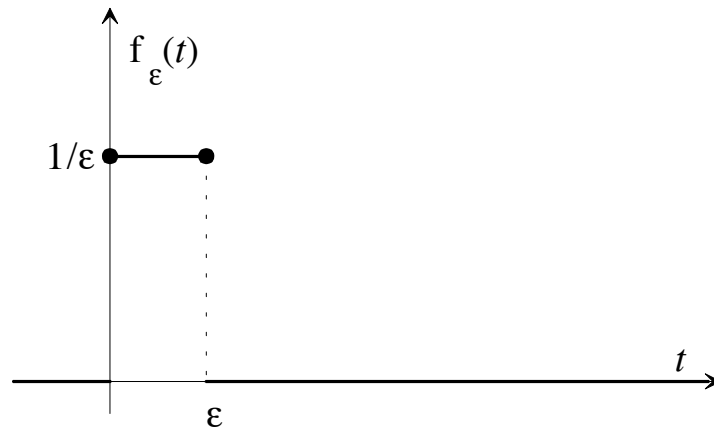


Fig. 3 : La funzione di cui l'impulso costituisce il limite

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\text{imp}(t)] &= \int_0^{\infty} \text{imp}(t) e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f_{\epsilon}(t) e^{-st} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} e^{-st} dt = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{s e^{-s\epsilon}}{s} = 1 \end{aligned}$$

### Proprietà notevoli della trasformata

- Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L}[f_2(t)].$$

- Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\text{Se } \mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

$$\text{allora } \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a).$$

- Traslazione nel dominio del tempo

$$\text{Se } \mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

$$\text{allora } \mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s), \text{ per } \tau \geq 0.$$

- Derivazione nel dominio del tempo

$$\text{Se } \mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

$$\text{allora } \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+).$$

- Derivazione nel dominio della variabile complessa

$$\text{Se } \mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

$$\text{allora } \mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}.$$

### Trasformate notevoli

$f(t), t \geq 0$	$F(s)$
imp( $t$ )	1
sca( $t$ )	$1/s$
ram( $t$ )	$1/s^2$
par( $t$ )	$1/s^3$
$e^{at}$	$1/(s-a)$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos(\omega t)$	$s/(s^2+\omega^2)$

dove:

$$\text{ram}(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{par}(t) = \begin{cases} t^2/2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

### Poli e zeri

I poli di una trasformata  $F(s)$  sono i valori di  $s$  per cui  $|F(s)| = \infty$ .

Gli zeri di una trasformata  $F(s)$  sono i valori di  $s$  per cui  $F(s) = 0$ .

Se  $F(s)$  è *razionale*, ossia esprimibile come rapporto di due polinomi in  $s$ ,

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

i poli sono le radici del denominatore  $D(s)$ , gli zeri le radici del numeratore  $N(s)$ .

## Antitrasformata di Laplace

Data una funzione  $F(s)$  di variabile complessa, si vuole determinare la funzione  $f(t)$  di cui  $F(s)$  costituisce la trasformata.

I seguenti due teoremi forniscono informazioni parziali su  $f(t)$ .

### *Teorema del valore iniziale*

Se  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ,

allora  $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$ .

Se, ad esempio,

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{2s^3 + 3s^2 + 4},$$

allora  $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3 + s^2 + s}{2s^3 + 3s^2 + 4} = \frac{1}{2}$ .

### *Teorema del valore finale*

Se  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , e  $F(s)$  è razionale e ha poli tutti a parte reale negativa oppure nell'origine del piano complesso, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)].$$

Se, ad esempio,

$$F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{2s^3 + 3s^2 + s},$$

$F(s)$  ha poli in 0,  $-1/2$  e  $-1$ , per cui il teorema è applicabile, e risulta:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + s + 1}{2s^2 + 3s + 1} = 1.$$

---

### *Metodo di Heaviside per funzioni razionali*

Consente di ricavare l'espressione analitica dell'antitrasformata quando la trasformata è una funzione razionale, ossia un rapporto di polinomi in  $s$ :

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0s^n + b_1s^{n-1} + \dots + b_n}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Il metodo viene qui presentato solo per alcuni casi particolari.

### 1) Poli reali semplici

Il denominatore è fattorizzabile come:

$$D(s) = (s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n), \quad p_i \in \mathfrak{R}, \quad p_i \neq p_j.$$

Ne consegue:

$$F(s) = \frac{\alpha_1}{s + p_1} + \frac{\alpha_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s + p_n}$$

Si ricavano i coefficienti  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  mediante confronto tra questa espressione e l'espressione originaria di  $F(s)$ . Infine si antitrasformano i singoli termini:

$$f(t) = \alpha_1 e^{-p_1 t} + \alpha_2 e^{-p_2 t} + \cdots + \alpha_n e^{-p_n t}, \quad t \geq 0.$$

### 2) Poli reali semplici e un polo reale multiplo

Il denominatore è fattorizzabile come:

$$D(s) = (s + p_1)^k (s + p_2) \cdots (s + p_m), \quad p_i \in \mathfrak{R}, \quad p_i \neq p_j, \quad m = n - (k - 1).$$

Ne consegue:

$$F(s) = \frac{\alpha_{1k}}{(s + p_1)^k} + \frac{\alpha_{1(k-1)}}{(s + p_1)^{k-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{11}}{s + p_1} + \frac{\alpha_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{s + p_m}$$

Si ricavano i coefficienti  $\alpha_{1k}, \dots, \alpha_{11}, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  mediante confronto tra questa espressione e l'espressione originaria di  $F(s)$ . Infine si antitrasformano i singoli termini:

$$f(t) = \alpha_{1k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-p_1 t} + \alpha_{1(k-1)} \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} e^{-p_1 t} + \cdots + \alpha_{11} e^{-p_1 t} + \alpha_2 e^{-p_2 t} + \cdots + \alpha_m e^{-p_m t}, \quad t \geq 0.$$

### 3) Poli reali semplici e due poli complessi e coniugati semplici

Il denominatore è fattorizzabile come:

$$D(s) = (s + p_1)(s + \bar{p}_1)(s + p_2) \cdots (s + p_m), \quad p_i \in \mathfrak{R} \ (i \geq 2), \quad p_i \neq p_j, \quad m = n - 1.$$

Ne consegue (posto  $p_1 = \sigma + j\omega$ ):

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\alpha_1}{s + p_1} + \frac{\bar{\alpha}_1}{s + \bar{p}_1} + \frac{\alpha_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{s + p_m} = \frac{\beta s + \gamma}{s^2 + 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2} + \frac{\alpha_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{s + p_m} \\ &= \beta \frac{s + \sigma}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{-\beta\sigma + \gamma}{\omega} \frac{\omega}{(s + \sigma)^2 + \omega^2} + \frac{\alpha_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{s + p_m} \end{aligned}$$

con  $\beta$  e  $\gamma$  parametri reali opportuni. Si ricavano i coefficienti  $\beta, \gamma, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  mediante confronto tra questa espressione e l'espressione originaria di  $F(s)$ . Infine si antitrasformano i singoli termini:

$$f(t) = \beta e^{-\sigma t} \cos(\omega t) + \frac{-\beta\sigma + \gamma}{\omega} e^{-\sigma t} \sin(\omega t) + \alpha_2 e^{-p_2 t} + \cdots + \alpha_m e^{-p_m t}, \quad t \geq 0.$$



## Funzione di trasferimento

Consideriamo un sistema dinamico lineare in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned}, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n, \mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m, \mathbf{y} \in \mathfrak{R}^p$$

Introduciamo i vettori  $\mathbf{X}(s)$ ,  $\mathbf{U}(s)$ ,  $\mathbf{Y}(s)$  che contengono le trasformate di Laplace delle componenti dei vettori  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$ , rispettivamente.

Osservando che risulta:

$$\mathcal{L}[\dot{\mathbf{x}}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[\dot{x}_1(t)] \\ \mathcal{L}[\dot{x}_2(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[\dot{x}_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ sX_2(s) - x_2(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0)$$

$$\mathcal{L}[\mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \begin{bmatrix} \mathcal{L}[a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t)] \\ \mathcal{L}[a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t)] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \dots + a_{1n}X_n(s) \\ a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + \dots + a_{2n}X_n(s) \\ \vdots \\ a_{n1}X_1(s) + a_{n2}X_2(s) + \dots + a_{nn}X_n(s) \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

e analogamente per le altre trasformate di prodotti matrice-vettore, si ottiene, sfruttando la linearità della trasformata:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

Si è quindi ottenuto un sistema **algebrico** nelle trasformate delle variabili. Per tutti i valori di  $s$  diversi dagli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ , risulta:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + (s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0)$$

e quindi:

$$\mathbf{Y}(s) = \left[ \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{U}(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0).$$

Di particolare interesse è la situazione in cui lo stato iniziale è nullo ( $\mathbf{x}(0) = 0$ ). Risultata:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s),$$

dove la matrice (di dimensioni  $p \times m$ ):

$$\mathbf{G}(s) = \left[ \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right]$$

prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema.

Nel caso SISO ( $m=p=1$ ), la funzione di trasferimento diventa uno scalare e si può scrivere, sempre a stato iniziale nullo:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

La funzione di trasferimento può essere calcolata con la formula precedente (ricavando quindi le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e invertendo una matrice  $n \times n$ ) oppure trasformando le singole equazioni membro a membro (a stato iniziale nullo), e ricavando il legame tra  $Y(s)$  e  $U(s)$  mediante eliminazione delle  $X_i(s)$ .

Riprendiamo gli esempi di sistemi dinamici elementari trattati in precedenza, limitandoci naturalmente a quelli lineari:

### Resistore

$$y(t) = \frac{1}{R}u(t) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{R}$$

### Induttore

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ls}$$

### Condensatore

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Cs}$$

### Massa

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2}$$

### Oscillatore meccanico

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{M}(-Kx_1(t) - Dx_2(t) + u(t))$$

$$y(t) = x_1(t) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}$$

### Serbatoio cilindrico

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{A_S}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{A_S s}$$

## Struttura della funzione di trasferimento

Si consideri un sistema SISO, per cui la funzione di trasferimento è uno scalare:

$$G(s) = \left[ C(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D \right].$$

Osserviamo che:

$$(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})} \begin{bmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) & \cdots & k_{1n}(s) \\ k_{21}(s) & k_{22}(s) & \cdots & k_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1}(s) & k_{n2}(s) & \cdots & k_{nn}(s) \end{bmatrix},$$

dove i polinomi  $k_{ij}(s)$  sono i complementi algebrici della matrice  $(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$  ed hanno, per costruzione, grado non superiore a  $n-1$  (mentre il determinante a denominatore ha ovviamente grado  $n$ ).

Nel formare lo scalare  $C(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$  si combinano linearmente i polinomi  $k_{ij}$ , ottenendo un polinomio che non può avere grado maggiore dei singoli polinomi. A questa espressione va poi sommato  $D$ , se il sistema non è strettamente proprio.

Concludiamo quindi che la funzione di trasferimento è razionale (rapporto di polinomi):

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

che il denominatore  $D(s)$  ha grado  $n$ , mentre per il numeratore:

$$N(s) = \begin{cases} \text{polinomio di grado } \leq (n-1), & \text{se il sistema è strett. proprio } (D = 0) \\ \text{polinomio di grado } = n, & \text{se il sistema non è strett. proprio } (D \neq 0) \end{cases}$$

Si osservi quindi che il grado del numeratore non può mai eccedere quello del denominatore.

Si ricorda inoltre che un polinomio di grado  $n$  a coefficienti reali ammette nel piano complesso  $n$  radici, reali o a coppie complesse e coniugate (teorema fondamentale dell'algebra).

Gli **zeri** della funzione di trasferimento sono le radici del numeratore  $N(s)$  (e quindi sono in numero minore o uguale a  $n$ ).

I **poli** della funzione di trasferimento sono le radici del denominatore  $D(s)$  (e quindi sono in numero uguale a  $n$ ). I poli, in quanto radici del determinante della matrice  $(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ , coincidono con gli **autovalori** della matrice  $\mathbf{A}$ .

Queste conclusioni non contemplano esplicitamente il caso in cui numeratore e denominatore abbiano una o più radici comuni. Nel formare l'espressione della funzione di trasferimento tali radici si semplificano, per cui il denominatore avrà grado minore di  $n$  (e il numeratore grado minore o uguale a quello del denominatore). In questo caso i poli della funzione di trasferimento formano un sottoinsieme degli autovalori della matrice  $\mathbf{A}$ .

Nel piano complesso, i poli vengono di norma rappresentati con una crocetta, gli zeri con un pallino. La funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s},$$

presenta due zeri, in  $s = -j$  e  $s = j$ , e tre poli, in  $s = 0$ ,  $s = -1$  e  $s = -2$ , rappresentati come in figura:

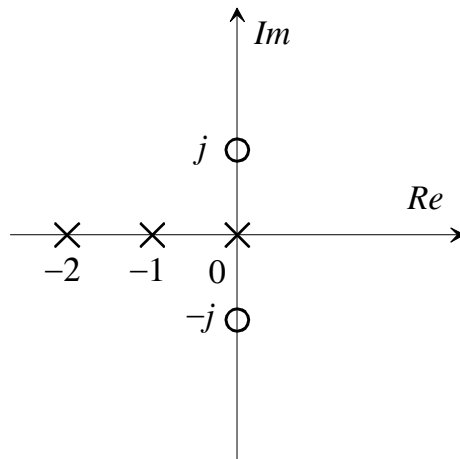


Fig. 4 : Disposizione di poli e zeri.

## Parametri caratteristici della funzione di trasferimento

Si è visto che la funzione di trasferimento di un sistema dinamico è una funzione razionale della variabile complessa  $s$ , ossia è il rapporto di due polinomi:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_0 s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n}{s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \dots + \gamma_n}$$

Alternativamente si può utilizzare la seguente espressione equivalente:

$$G(s) = \rho \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_i (s + p_i)}$$

dove le produttorie corrono su tutti gli zeri e su tutti i poli, rispettivamente, mentre:

$\rho$ : **costante di trasferimento**

$-z_i$ : **zeri**

$-p_i$ : **poli**

Si osservi che i parametri  $z_i$  e  $p_i$  possono anche essere complessi. Per ottenere una rappresentazione con solo numeri reali è sufficiente accoppiare i termini complessi e coniugati (a numeratore e a denominatore), nei polinomi di secondo grado a radici complesse. Questi polinomi, a loro volta sono espressi per mezzo di due parametri particolarmente significativi, indicati con  $\zeta$  e  $\omega_n$ :

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2,$$

dove  $\omega_n$  è un numero positivo.

Per comprendere il significato dei due parametri, osserviamo che le radici del polinomio sono:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2},$$

e risultano effettivamente complesse e coniugate se  $|\zeta| < 1$ .

Il significato dei parametri  $\zeta$  e  $\omega_n$  è allora illustrato dalla seguente figura:

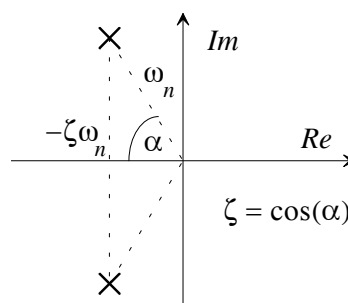


Fig. 5 : Significato dei parametri  $\zeta$  e  $\omega_n$

$\omega_n$ , **pulsazione naturale**: è il modulo delle due radici, ossia la loro distanza dall'origine.

$\zeta$ , **smorzamento**: è il coseno dell'angolo  $\alpha$  formato dalla congiungente l'origine con le radici, rispetto al semiasse reale negativo

Poiché la parte reale dei poli vale  $-\zeta\omega_n$  e  $\omega_n$  è un numero positivo, si ha:

$\zeta > 0$ : due radici nel semipiano sinistro

$\zeta = 0$ : due radici sull'asse immaginario

$\zeta < 0$ : due radici nel semipiano destro

Possiamo a questo punto esprimere la funzione di trasferimento per mezzo di soli parametri reali nella seguente forma:

$$G(s) = \rho \frac{\prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_{zi}\omega_{nzi}s + \omega_{nzi}^2)}{\prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_{pi}\omega_{npi}s + \omega_{npi}^2)},$$

con  $\omega_{nzi}, \omega_{npi} > 0$ ,  $|\zeta_{zi}|, |\zeta_{pi}| \leq 1$ .

Un'ulteriore espressione della funzione di trasferimento è la seguente:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + s\tau_i)}{s^g \prod_i (1 + sT_i)}$$

dove le produttorie corrono su tutti gli zeri e su tutti i poli diversi da zero, rispettivamente, mentre:

$\mu$ : **guadagno**

$g$ : **tipo**

$\tau_i$ : **costanti di tempo degli zeri**

$T_i$ : **costanti di tempo dei poli**

Si osservi che il rapporto delle due produttorie valutato in  $s = 0$  è pari a 1. Per ottenere questo risultato si sono raggruppati gli eventuali poli o zeri in  $s = 0$  nel termine a denominatore  $s^g$ . Pertanto  $g$  è un numero intero, uguale, se positivo, al numero di poli in  $s=0$ , se negativo, al numero di zeri in  $s=0$  (se è nullo non vi sono né poli né zeri in  $s=0$ ).

Se  $g=0$ , risulta inoltre:

$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0) = -\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D},$$

espressione che prende il nome di **guadagno statico**, in quanto corrisponde al rapporto tra ingresso e uscita all'equilibrio.<sup>2</sup>

Più in generale:

$$\mu = \lim_{s \rightarrow 0} [s^g G(s)].$$

Anche questa forma della funzione di trasferimento può essere espressa in termini solo di parametri reali:

<sup>2</sup> All'equilibrio risulta  $0 = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}}$ ,  $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\bar{\mathbf{u}}$ , per cui, eliminando  $\bar{\mathbf{x}}$ , si ottiene il risultato.

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{\prod_i (1 + s\tau_i) \prod_i \left( 1 + 2 \frac{\zeta_{zi}}{\omega_{nzi}} s + \frac{s^2}{\omega_{nzi}^2} \right)}{\prod_i (1 + sT_i) \prod_i \left( 1 + 2 \frac{\zeta_{pi}}{\omega_{npi}} s + \frac{s^2}{\omega_{npi}^2} \right)},$$

con  $\omega_{nzi}, \omega_{npi} > 0$ ,  $|\zeta_{zi}|, |\zeta_{pi}| \leq 1$ .

## Calcolo delle risposte temporali

Dato un sistema dinamico lineare ed un ingresso trasformabile secondo Laplace, è possibile ricavare l'espressione analitica dell'uscita del sistema dinamico forzata da tale ingresso. Occorre:

1. Ricavare, se non è già data, la funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema
2. Ricavare la trasformata  $U(s)$  dell'ingresso
3. Calcolare la trasformata dell'uscita  $Y(s) = G(s)U(s)$
4. Antitrasformare

Sia ad esempio:

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+5s+4}, \quad u(t) = \text{sca}(t).$$

Sappiamo allora che:

$$U(s) = \frac{1}{s}, \quad Y(s) = G(s)U(s) = \frac{2s+1}{s(s^2+5s+4)} = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+4)}$$

Applichiamo il metodo di Heaviside per l'antitrasformazione di  $Y(s)$ :

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+4} = \frac{\alpha_1(s+1)(s+4) + \alpha_2s(s+4) + \alpha_3s(s+1)}{s(s+1)(s+4)} = \frac{2s+1}{s(s+1)(s+4)}.$$

Imponendo l'uguaglianza dei due numeratori, in particolare nei punti  $s = 0$ ,  $s = -1$ ,  $s = -4$ , si ottiene:

$$\left. \begin{array}{l} 4\alpha_1 = 1 \\ -3\alpha_2 = -1 \\ 12\alpha_3 = -7 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 1/4 \\ \alpha_2 = 1/3 \\ \alpha_3 = -7/12 \end{array} \right.$$

Pertanto:

$$y(t) = \frac{1}{4} \text{sca}(t) + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{7}{12} e^{-4t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{7}{12} e^{-4t}, \quad t \geq 0.$$



## Stabilità

Sia dato un sistema **lineare**, all'equilibrio all'istante  $t=0$ .

Si applichi quindi, all'istante  $t=0$ , un **impulso** all'ingresso del sistema (ossia una perturbazione di ampiezza molto elevata e di durata brevissima).

Si possono presentare tre tipologie di comportamenti per l'andamento temporale dell'uscita  $y$ , riportate in figura:

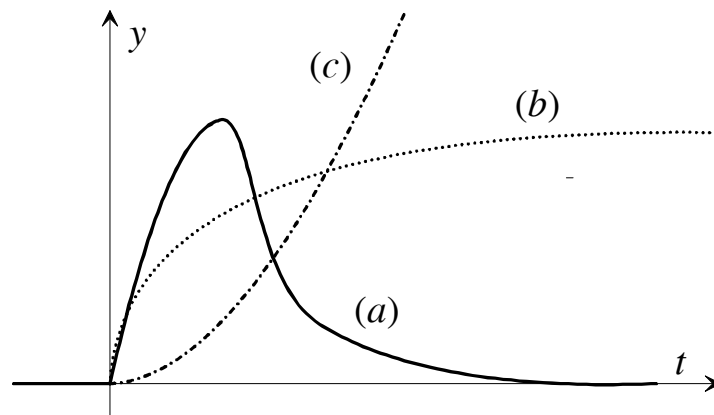


Fig. 6 : Differenti comportamenti della risposta all'impulso

- (a) l'uscita converge al valore iniziale (supposto nullo);
- (b) l'uscita non converge al valore iniziale, ma non diverge;
- (c) l'uscita diverge.

Questi comportamenti corrispondono, rispettivamente, a un sistema:

- (a) **asintoticamente stabile**;
- (b) **semplicemente stabile** (o stabile, ma non asintoticamente);
- (c) **instabile**.

Per i sistemi dinamici lineari, di cui ci stiamo occupando, la stabilità non è legata al particolare punto di equilibrio in cui si trova il sistema nel momento in cui si dà l'impulso in ingresso (tutti i punti di equilibrio sono equivalenti tra di loro). Ciò non è evidentemente vero per un sistema non lineare (si pensi ad un pendolo e ai suoi differenti punti di equilibrio).

Ne consegue che per un sistema lineare la proprietà di stabilità deve essere deducibile dall'espressione matematica del sistema dinamico, ed in particolare dalla **sua funzione di trasferimento**.

Limitiamoci, per brevità, al caso di sistemi con poli semplici (ossia radici non multiple del denominatore). Ricordando che la trasformata dell'impulso vale 1, si ottiene:

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = \rho \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_i (s + p_i)} = \sum_i \frac{\alpha_i}{s + p_i} .$$

Antitrasformando, si ricava l'espressione analitica della risposta all'impulso:

$$y(t) = \sum_i \alpha_i e^{-p_i t}, \quad t \geq 0 .$$

Se  $p_i$  è complesso, ossia  $p_i = \alpha_i + j\beta_i$ , risulta:

$$e^{-p_i t} = e^{-\alpha_i t} (\cos(\beta_i t) - j \sin(\beta_i t)).$$

Naturalmente sarà presente anche il termine coniugato e i contributi immaginari allo sviluppo si elideranno.

Ora, se tutti i poli sono reali negativi ( $p_i > 0$ ) o complessi a parte reale negativa ( $\alpha_i > 0$ ), tutti gli esponenziali convergono a zero e, in base alla definizione, il sistema è *asintoticamente stabile*; se tutti i poli sono negativi, a meno di uno che è nullo ( $p_i = 0$ ) o di una coppia che è immaginaria ( $\alpha_i = 0$ ), l'esponenziale con esponente nullo dà luogo ad un termine costante mentre quelli con esponente immaginario danno luogo a termini sinusoidali, e quindi la risposta non converge a zero, ma non diverge: il sistema è pertanto *semplicemente stabile*; se, infine, almeno un polo è reale positivo ( $p_i < 0$ ) o complesso con parte reale positiva ( $\alpha_i < 0$ ), l'esponenziale relativo a tale polo diverge, facendo divergere la risposta all'impulso: il sistema è quindi *instabile*.

Estendendo, con ragionamenti analoghi, le conclusioni al caso di poli multipli, si può formulare il seguente teorema:

Un sistema è:

**asintoticamente stabile:** se e solo se tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno parte reale negativa;

**semplicemente stabile:** se e solo se tutti i poli della sua funzione di trasferimento hanno parte reale negativa o nulla, almeno uno ha parte reale nulla, e tutti i poli a parte reale nulla sono semplici;

**instabile:** se e solo se almeno un polo della sua funzione di trasferimento ha parte reale positiva oppure ha parte reale nulla ed è multiplo.

L'analisi di stabilità si riduce quindi all'analisi della posizione dei poli della funzione di trasferimento. Esistono criteri per valutare se un polinomio (in questo caso il denominatore della funzione di trasferimento) ha tutte le radici a parte reale negativa, cioè nel semipiano sinistro del piano complesso. Ci limitiamo a dare una condizione necessaria (che, come tale, ha interesse solo quando viene violata).

**Condizione necessaria** perché il polinomio:

$$D(s) = s^n + \gamma_1 s^{n-1} + \gamma_2 s^{n-2} + \dots + \gamma_n$$

abbia tutte le radici a parte reale negativa è che i coefficienti  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  siano tutti positivi.

Per esempio:

$$G(s) = \frac{s+2}{s^3 + s^2 + s - 1} \quad \text{non è asintoticamente stabile;}$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^3 + s^2 + 1} \quad \text{non è asintoticamente stabile;}$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^3 + s^2 + s + 1} \quad \text{non si può concludere nulla dalla condizione necessaria.}$$

A completamento delle note sulla stabilità osserviamo che:

1. se il sistema è dato in forma di equazioni di stato, la discussione sulla stabilità può anche essere condotta sugli autovalori della matrice  $A$ . Infatti i poli della funzione di trasferimento coincidono con tali autovalori, in assenza di cancellazioni di radici nel formare la funzione di trasferimento. In presenza invece di cancellazioni, se quindi i poli sono un sottoinsieme degli autovalori di  $A$ , la definizione di stabilità qui introdotta induce a ritenere inessenziali ai fini della valutazione della stabilità la posizione nel piano complesso degli autovalori cancellati (contano solo i poli). In realtà una definizione più generale di stabilità (stabilità alla Lyapunov), che fa riferimento al sistema espresso in termini di equazioni di stato, conduce alla conclusione che il sistema è asintoticamente stabile alla Lyapunov se e solo se tutti gli autovalori di  $A$  sono a parte reale negativa. Potremo allora dire che se tutti i poli della funzione di trasferimento sono a parte reale negativa ma vi sono autovalori cancellati a parte reale non negativa, il sistema è asintoticamente stabile esternamente ma è presente una **non asintotica stabilità interna**.
2. In questo corso non si danno definizioni di **stabilità di stati di equilibrio** per sistemi non lineari, né strumenti per valutarla. E' tuttavia evidente che lo studio della stabilità del sistema linearizzato nell'intorno dello stato di equilibrio fornisce chiare indicazioni del comportamento del sistema non lineare perturbato rispetto alla condizione di equilibrio.

## Esercizi

### **Esercizio 3.1**

Si calcoli la funzione di trasferimento dall'ingresso  $u$  all'uscita  $y$  per la rete elettrica dell'esercizio 2.1, in cui si ponga  $R=1$ ,  $L=1$ ,  $C=1$ .

### **Esercizio 3.2**

Si calcoli la funzione di trasferimento dall'ingresso  $u$  all'uscita  $y$  per il seguente sistema dinamico:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) - 2x_3(t) + u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

### **Esercizio 3.3**

Si determinino tipo, guadagno, costanti di tempo degli zeri e dei poli per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{2s - s^2}{(s+1)(s^2 + 6s + 8)}$$

### **Esercizio 3.4**

Si discuta la stabilità dei sistemi descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{1}{s+5} \quad G_2(s) = \frac{3}{s^2 + s - 1}$$

$$G_3(s) = \frac{5}{s^4 + 3s^2 + 2s + 1} \quad G_4(s) = \frac{8s - 1}{s^2 + s + 1}$$

### **Esercizio 3.5**

Si scrivano le equazioni (nel dominio del tempo) di un sistema dinamico che ammette la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{3}{s+4}$$

### **Esercizio 3.6**

Si calcoli l'espressione analitica della risposta all'impulso della seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4s+1}{s^2 + 5s + 6}$$

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 3.1

Trasformando secondo Laplace entrambi i membri delle equazioni, si ottiene:

$$sX_1 = -X_1 - X_2 + U$$

$$sX_2 = X_1 - X_2$$

$$Y = X_2$$

da cui, eliminando  $X_1$  e  $X_2$ , si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

### Esercizio 3.2

Trasformando secondo Laplace entrambi i membri delle equazioni, si ottiene:

$$sX_1 = X_2$$

$$sX_2 = X_3$$

$$sX_3 = -X_1 - X_2 - 2X_3 + U$$

$$Y = X_1$$

da cui, eliminando  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

### Esercizio 3.3

Riscrivendo la funzione di trasferimento nella forma:

$$G(s) = \frac{\mu (1 + sT_{z1})}{s^g (1 + sT_{p1})(1 + sT_{p2})(1 + sT_{p3})}$$

si ottiene:

$$G(s) = \frac{s (1 - 0.5s)}{4 (1 + s)(1 + 0.25s)(1 + 0.5s)},$$

da cui si deduce:

Tipo:  $g = -1$

Guadagno:  $\mu = 1/4$

Costante di tempo dello zero:  $T_{z1} = -0.5$

Costanti di tempo dei poli:  $T_{p1} = 1$ ,  $T_{p2} = 0.25$ ,  $T_{p3} = 0.5$ .

### **Esercizio 3.4**

$G_1$  e  $G_4$  sono asintoticamente stabili (hanno i poli nel semipiano sinistro),  $G_2$  e  $G_3$  non lo sono, in quanto non soddisfano la condizione necessaria (per la precisione, sono instabili).

### **Esercizio 3.5**

Una possibile (non unica) soluzione è la seguente:

$$\dot{x}(t) = -4x(t) + 3u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

### **Esercizio 3.6**

Poiché la trasformata di Laplace dell'ingresso (impulso) vale 1, la trasformata di Laplace dell'uscita coincide con la funzione di trasferimento  $G(s)$ . Si applica il metodo di antitrasformazione di Heaviside:

$$Y(s) = G(s) = \frac{4s+1}{(s+2)(s+3)} = \frac{\alpha_1}{s+2} + \frac{\alpha_2}{s+3} = \frac{\alpha_1(s+3) + \alpha_2(s+2)}{(s+2)(s+3)} .$$

Confrontando i numeratori, una volta in  $s = -2$  e una volta in  $s = -3$ , si ottiene:

$$\alpha_1 = -7, \quad \alpha_2 = 11 ,$$

da cui:

$$y(t) = -7e^{-2t} + 11e^{-3t} \quad t \geq 0 .$$

## *Lezione 4*

Risposte canoniche dei sistemi  
del primo e del secondo ordine

## Parametri caratteristici della risposta allo scalino

Per risposte canoniche si intendono le risposte dei sistemi dinamici ai segnali cosiddetti canonici (impulso, scalino, rampa), ovvero quei segnali utilizzabili come test per evidenziare le proprietà dinamiche del sistema. Ci concentreremo sui sistemi del primo e secondo ordine in quanto rappresentativi dei modelli di prima approssimazione di larga parte dei sistemi fisici.

Sul tracciato di una generica risposta allo scalino potremo definire alcuni parametri caratteristici:

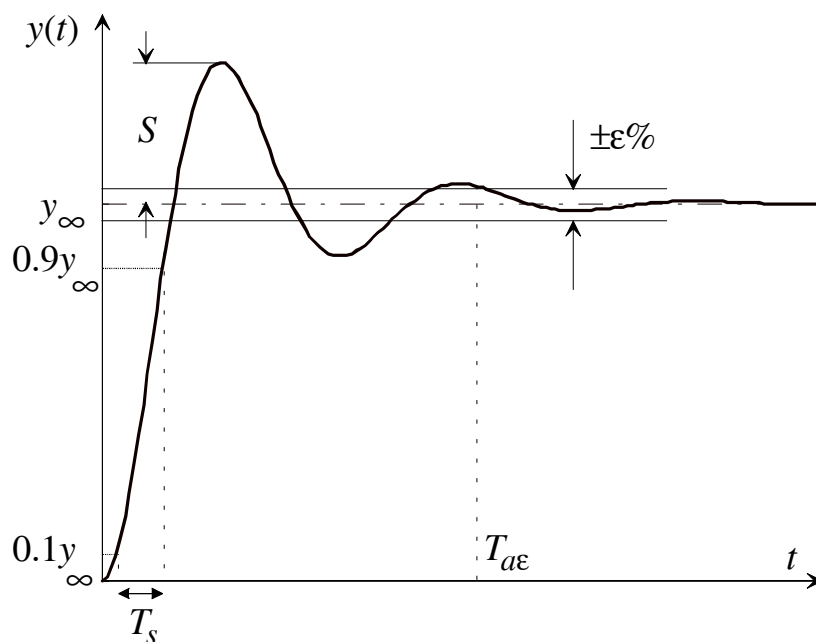


Fig. 1 : Parametri caratteristici della risposta allo scalino

- **Tempo di salita  $T_s$** : è il tempo impiegato dalla risposta a passare dal 10% al 90% del valore di regime.
- **Tempo di assestamento al  $(100-\epsilon)\%$   $T_{a\epsilon}$** : è il tempo impiegato dalla risposta ad entrare definitivamente in una fascia compresa tra  $\pm\epsilon\%$  del valore di regime.
- **Sovraelongazione percentuale massima  $S_E$** : è l'escursione massima della risposta rispetto al valore di regime, rapportata in percentuale al valore di regime stesso:

$$S_E = \frac{S}{y_\infty} 100 = \frac{\max\{y(t)\} - y_\infty}{y_\infty} 100 .$$



## Sistemi del primo ordine

L'espressione più generale della funzione di trasferimento per un sistema del primo ordine (ossia con un solo polo) è la seguente:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{1+s\tau}{1+sT}$$

### Sistemi strettamente propri

Sono i sistemi in cui il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore. Sistemi del primo ordine strettamente propri non possono quindi presentare zeri:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{1}{1+sT} = \begin{cases} \frac{\mu}{1+sT}, & g=0 \\ \frac{\mu}{s}, & g=1 \end{cases}$$

$$\boxed{g=0}$$

$$G(s) = \frac{\mu}{1+sT}$$

Studiamo la *risposta allo scalino* ( $u(t) = sca(t) \Rightarrow U(s) = 1/s$ ):

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{1+sT} \frac{1}{s} = \frac{\mu}{s} - \frac{\mu T}{1+sT} = \mu \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T} \right)$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \mu(1 - e^{-t/T}), \quad t \geq 0.$$

A seconda del segno di  $T$  l'andamento di  $y$  risulta molto diverso<sup>1</sup>:

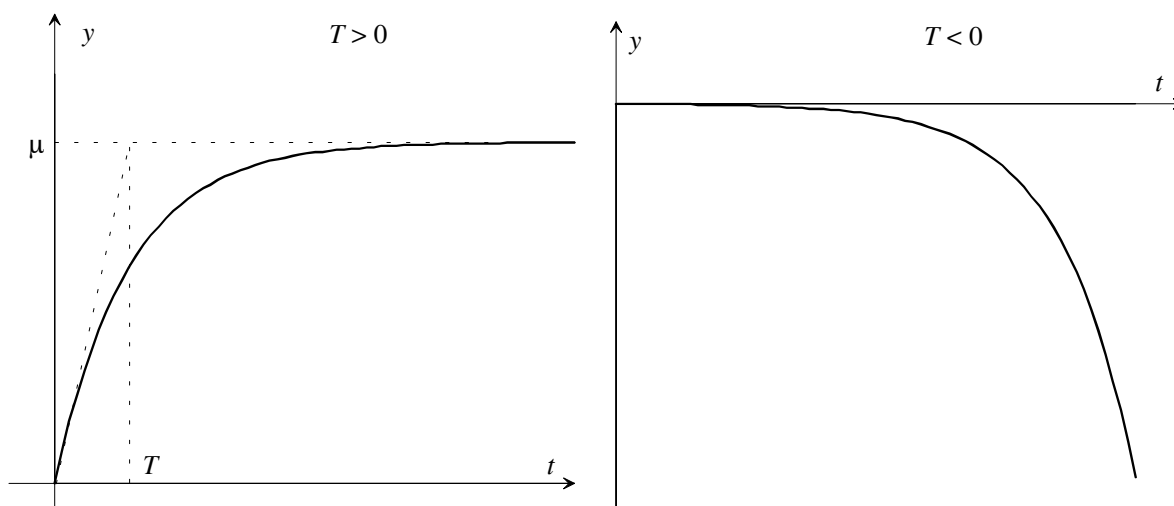


Fig. 2 : Risposta allo scalino per  $T > 0$  e  $T < 0$

<sup>1</sup>Qui e nel seguito si assumerà, senza alcuna perdita di generalità, il parametro  $\mu$  positivo.

Quando  $T > 0$ , la risposta  $y$  si assesta su un valore finito, mentre quando  $T < 0$  la risposta diverge all'infinito. Si osservi che il sistema di funzione di trasferimento  $G(s)$  presenta un polo per  $s = -1/T$ . Pertanto il sistema risulta *asintoticamente stabile* per  $T > 0$ , *instabile* per  $T < 0$ .

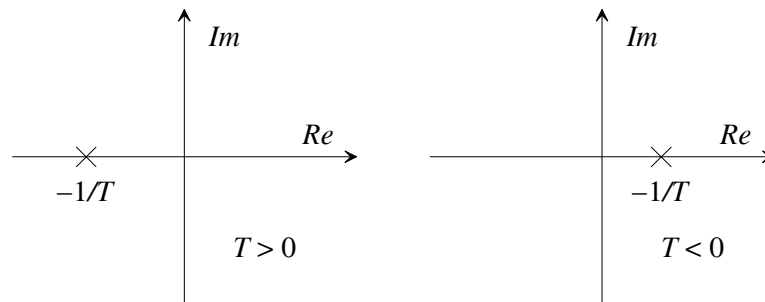


Fig. 3 : Posizione del polo per  $T > 0$  e  $T < 0$

Considerando solo il caso asintoticamente stabile ( $T > 0$ ), si può calcolare il valore limite (per  $t \rightarrow \infty$ ) della risposta allo scalino con il teorema del valore finale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{\mu}{1 + sT} \frac{1}{s} \right] = \mu.$$

Pertanto la risposta allo scalino tende al *guadagno*  $\mu$  del sistema: in altre parole il rapporto tra il valore limite dell'uscita ed il valore limite dell'ingresso (che in questo caso vale 1, essendo l'ingresso uno scalino), è pari al guadagno del sistema. Ciò costituisce una circostanza generale.

La forma del transitorio dipende invece solo dalla *costante di tempo*  $T$ . All'istante iniziale ( $t=0$ ) la derivata di  $y$  vale  $\mu/T$ : pertanto inizialmente la curva è tangente alla retta che passa per l'origine e che intercetta la retta orizzontale di ordinata  $\mu$  (ossia la retta a cui tende la risposta), in corrispondenza dell'istante  $t=T$  (fig. 1). Ne consegue che il transitorio è tanto più veloce quanto più piccolo è il valore della costante di tempo  $T$ . Si può verificare che la risposta  $y$  raggiunge praticamente (al 98÷99%) il valore di regime dopo un tempo pari a 4÷5 volte la costante di tempo  $T$ . Si osservi che da queste considerazioni emerge anche con molta evidenza un metodo grafico per tracciare l'andamento approssimato della risposta allo scalino.

Studiamo anche la *risposta all'impulso* ( $u(t) = \text{imp}(t) \Rightarrow U(s) = 1$ ):

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{1 + sT} = \frac{\mu}{T} \frac{1}{s + 1/T}.$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \frac{\mu}{T} e^{-t/T}, \quad t \geq 0.$$

Si noti che la risposta all'impulso risulta uguale alla derivata rispetto al tempo della risposta allo scalino (circostanza generale).

A seconda del segno di  $T$  si ottiene:

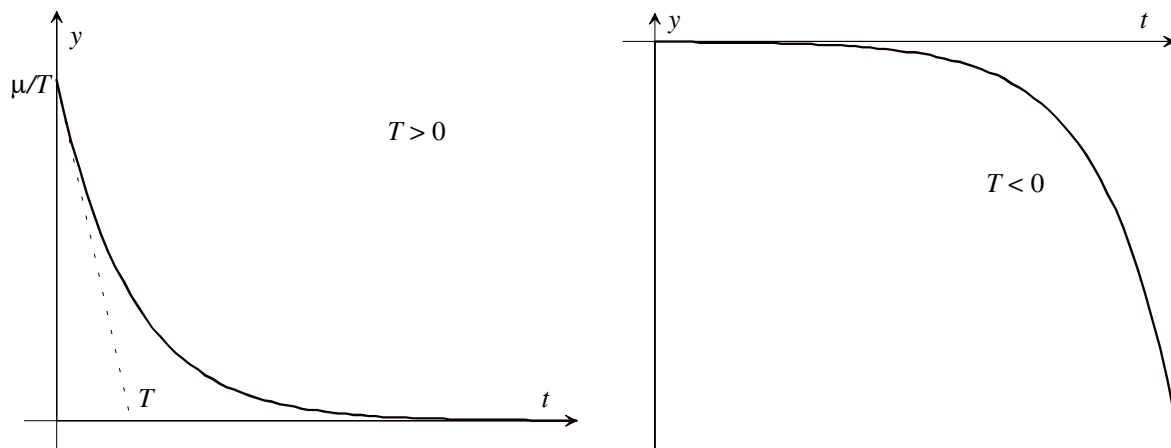


Fig. 4 : Risposta all'impulso per  $T > 0$  e  $T < 0$

Coerentemente con la definizione di stabilità, per  $T > 0$  (sistema asintoticamente stabile), la risposta converge a zero, per  $T < 0$  (sistema instabile) la risposta diverge.

$$g = 1$$

$$G(s) = \frac{\mu}{s}$$

Il sistema ha un polo in  $s=0$ : è pertanto semplicemente stabile.

Studiamo la *risposta allo scalino* ( $u(t) = sca(t) \Rightarrow U(s) = 1/s$ ):

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{s} \frac{1}{s} = \frac{\mu}{s^2}$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \mu ram(t)$$

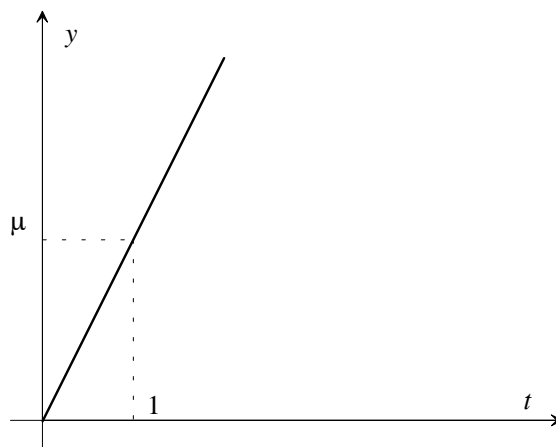


Fig. 5 : Risposta allo scalino

Per quanto riguarda la risposta all'impulso:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\mu}{s}$$

e quindi:

$$y(t) = \mu \text{sca}(t) .$$

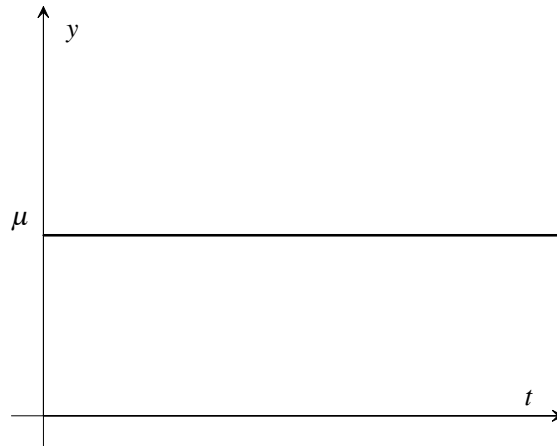


Fig. 6 : Risposta all'impulso

In entrambi i casi l'uscita equivale all'integrale dell'ingresso, moltiplicato per il fattore  $\mu$ .

### **Sistemi propri non strettamente**

Sono i sistemi in cui il grado del denominatore è uguale al grado del numeratore. Sistemi del primo ordine propri non strettamente presentano quindi uno zero:

$$G(s) = \frac{\mu}{s^g} \frac{1+s\tau}{1+sT} = \begin{cases} \mu \frac{1+s\tau}{1+sT}, & g = 0 \\ \mu \frac{1+s\tau}{s}, & g = 1 \\ \mu \frac{s}{1+sT}, & g = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{g = 0}$$

$$G(s) = \mu \frac{1+s\tau}{1+sT}$$

Studiando la *risposta allo scalino* si perviene alla seguente espressione:

$$y(t) = \mu \left[ 1 + \left( \frac{\tau}{T} - 1 \right) e^{-t/T} \right], \quad t \geq 0 .$$

Al variare del valore relativo di  $\tau$  e  $T$  (e quindi della posizione relativa del polo e dello zero) la risposta allo scalino cambia sensibilmente (si considera solo il caso asintoticamente stabile,  $T > 0$ ):

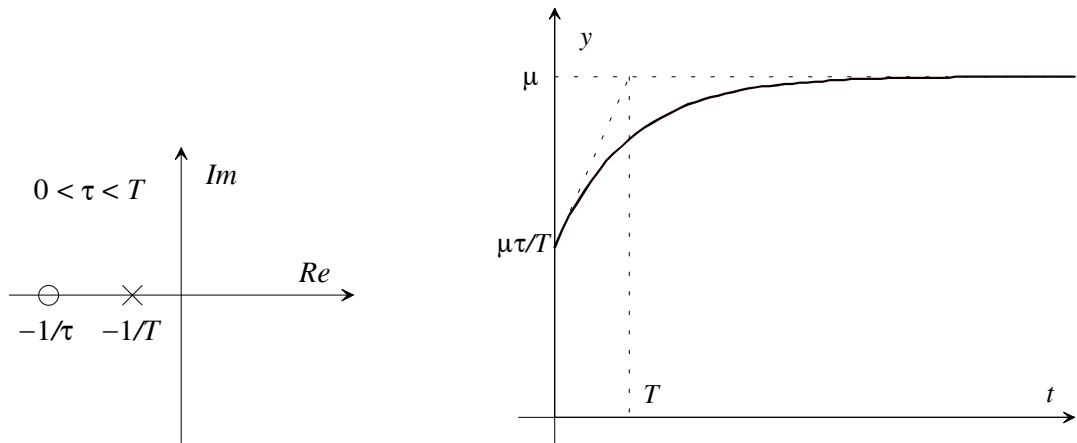


Fig. 7 : Risposta allo scalino per  $0 < \tau < T$

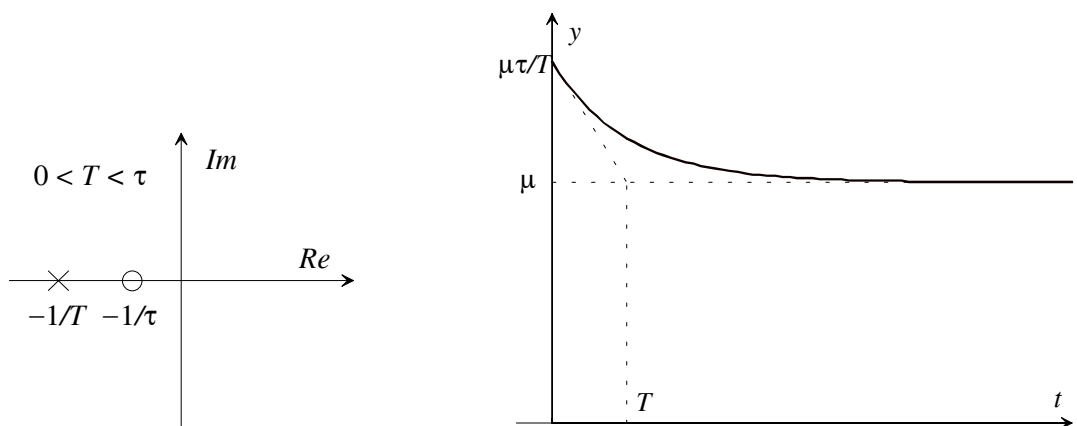


Fig. 8 : Risposta allo scalino per  $0 < T < \tau$

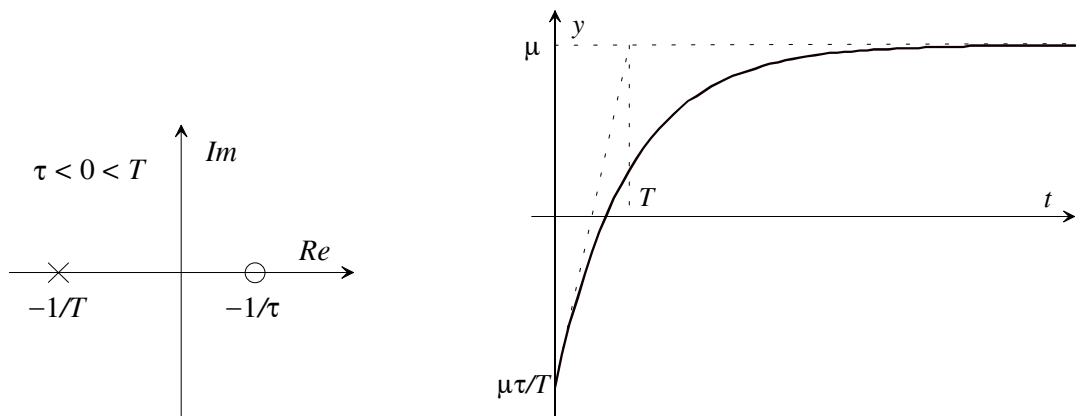


Fig. 9 : Risposta allo scalino per  $\tau < 0 < T$

Uno zero nel semipiano sinistro “anticipa” la risposta rispetto al caso di sistema privo di zero, nel senso che la risposta stessa si porta inizialmente ad un valore diverso da zero, dello stesso segno del valore di regime.

Uno zero nel semipiano destro “ritarda” la risposta rispetto al caso di sistema privo di zero, nel senso che la risposta stessa si porta inizialmente ad un valore diverso da zero, di segno opposto al valore di regime (*risposta inversa*). Questo tipo di comportamento è tipico dei

sistemi con zeri nel semipiano destro, che per ragioni che saranno chiare più avanti nel corso, prendono anche il nome di sistemi *a fase non minima*.

$$g = 1$$

$$G(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{s}$$

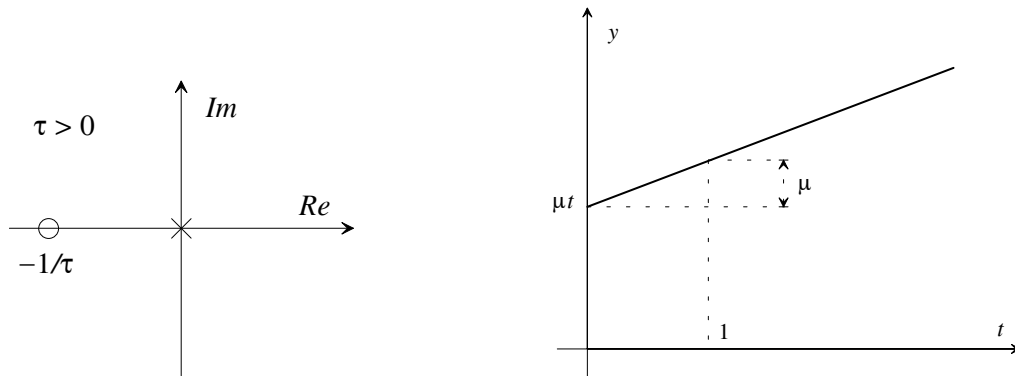


Fig. 10 : Risposta allo scalino per  $\tau > 0$

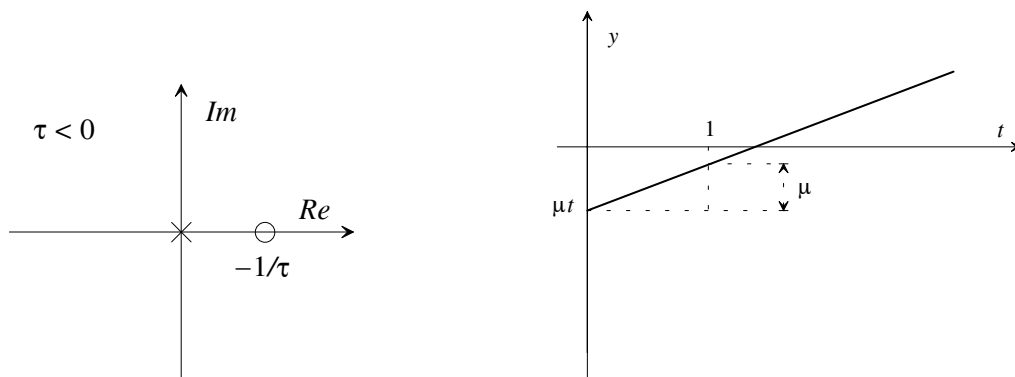


Fig. 11 : Risposta allo scalino per  $\tau < 0$

$$g = -1$$

$$G(s) = \mu \frac{s}{1 + sT}$$

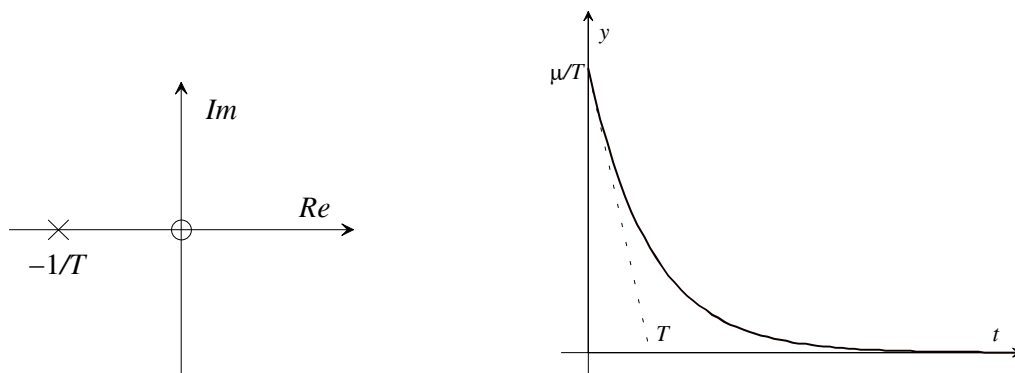


Fig. 12 : Risposta allo scalino (zero in  $s=0$ )

## Sistemi del secondo ordine

Per i sistemi del secondo ordine (che presentano cioè due poli) ci limiteremo ad esaminare alcuni casi particolari, rinunciando alla casistica completa.

### *Sistemi con poli reali e nessuno zero*

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}.$$

Assumiamo  $T_1$  e  $T_2$  positivi, ossia il sistema asintoticamente stabile (i suoi poli, in  $s = -1/T_1$ ,  $s = -1/T_2$ , sono nel semipiano sinistro).

La trasformata di Laplace della risposta allo scalino è data da:

$$Y(s) = \frac{\mu}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}.$$

In base al teorema del valore iniziale, otteniamo:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s\mathcal{L}(\dot{y})] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s(sY(s) - y(0))] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^2Y(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu s}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s\mathcal{L}(\ddot{y})] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s(s^2Y(s) - \dot{y}(0))] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^3Y(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu s^2}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \frac{\mu}{T_1 T_2} > 0$$

mentre in base al teorema del valore finale:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)} = \mu.$$

La risposta parte quindi da zero, con tangente orizzontale e concavità rivolta verso l'alto. Tende poi al valore  $\mu$ .

L'antitrasformata si può ottenere con il metodo di Heaviside:

$$y(t) = \mu \left[ 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right], \quad t \geq 0.$$

L'andamento tipico è a forma di "S":

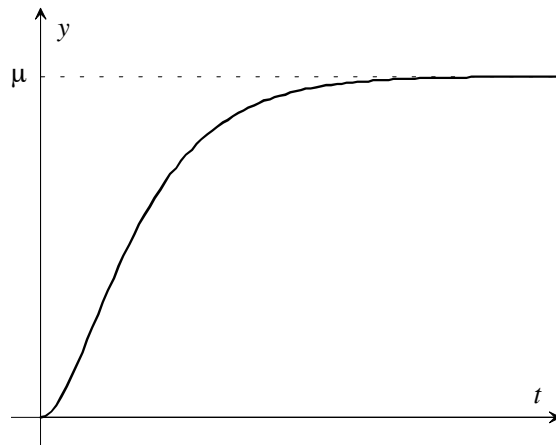


Fig. 13 : Risposta allo scalino

La durata del transitorio può essere facilmente legata alle due costanti di tempo  $T_1$  e  $T_2$  solo se i due valori sono molto diversi tra loro: in tal caso, infatti, conta solo il valore della costante di tempo più grande.

Se, ad esempio  $T_1 \gg T_2$ , allora:

$$y(t) \approx \mu[1 - e^{-t/T_1}], \quad t \geq 0.$$

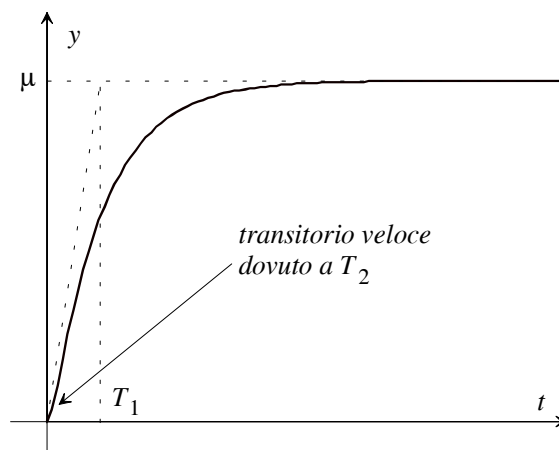


Fig. 14 : Risposta allo scalino con  $T_1 \gg T_2$

### Sistemi con poli reali e uno zero

$$G(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}.$$

Assumiamo  $T_1$  e  $T_2$  positivi, ossia il sistema asintoticamente stabile.

La trasformata di Laplace della risposta allo scalino è data da:

$$Y(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)}.$$

In base al teorema del valore iniziale, otteniamo:



$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \mu \frac{1 + s\tau}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \right] = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s\mathcal{L}(\dot{y})] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s(sY(s) - y(0))] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^2Y(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left[ \mu s \frac{1 + s\tau}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \right] = \frac{\mu\tau}{T_1T_2}$$

mentre in base al teorema del valore finale:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \mu \frac{1 + s\tau}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \right] = \mu .$$

La risposta parte quindi da zero, con tangente rivolta verso l'alto per  $\tau > 0$ , verso il basso per  $\tau < 0$ . La risposta tende poi al valore  $\mu$ .

Qualitativamente, gli andamenti della risposta allo scalino saranno:

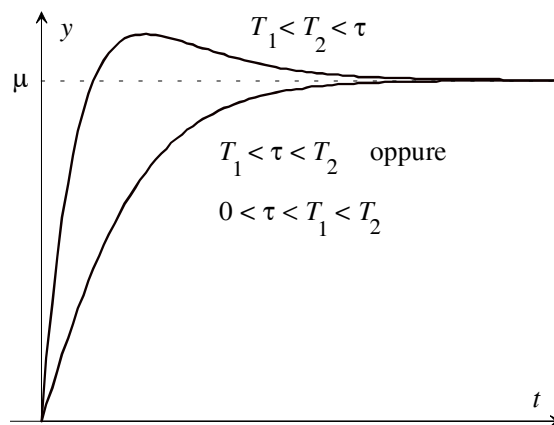


Fig. 15 : Risposta allo scalino con  $\tau > 0$

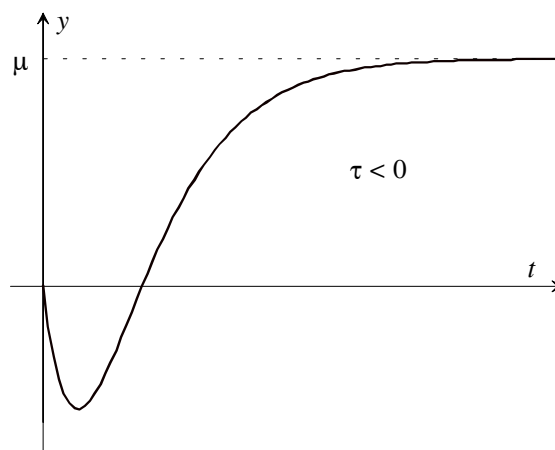


Fig. 16 : Risposta allo scalino con  $\tau < 0$

Si osservi il tratto di risposta inversa nel caso di zero nel semipiano destro ( $\tau < 0$ ).

### Sistemi con poli complessi e coniugati e nessuno zero

In questo caso è comodo riscrivere l'espressione della funzione di trasferimento nella forma equivalente:

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2},$$

dove  $\zeta$ , **smorzamento**, e  $\omega_n$ , **pulsazione naturale**, sono stati definiti nella precedente lezione.

Si ricorda che il significato dei parametri  $\zeta$  e  $\omega_n$  è illustrato dalla seguente figura:

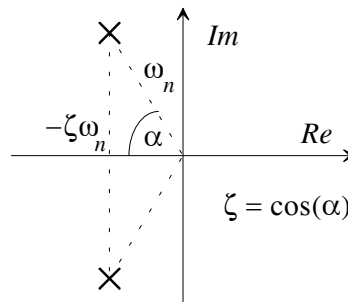


Fig. 17 : Significato dei parametri  $\zeta$  e  $\omega_n$

Si osservi inoltre che:

$\zeta > 0$ : due poli nel semipiano sinistro  $\Rightarrow$  sistema *asintoticamente stabile*

$\zeta = 0$ : due poli sull'asse immaginario  $\Rightarrow$  sistema *semplicemente stabile*

$\zeta < 0$ : due poli nel semipiano destro  $\Rightarrow$  sistema *instabile*

Studiamo la *risposta allo scalino*:

$$Y(s) = \frac{\mu}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

In base al teorema del valore iniziale, otteniamo:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = 0$$

$$\dot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^2 \mathcal{L}(\dot{y})] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s(sY(s) - y(0))] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^2 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu\omega_n^2 s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = 0$$

$$\ddot{y}(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^3 \mathcal{L}(\ddot{y})] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^2 (s^2 Y(s) - \dot{y}(0))] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s^3 Y(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu\omega_n^2 s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \mu\omega_n^2 > 0$$

mentre, per  $\zeta > 0$ , in base al teorema del valore finale:

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mu\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \mu.$$

L'espressione analitica della risposta allo scalino, ottenibile per antitrasformazione, è la seguente:

$$y(t) = \mu \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \alpha) \right],$$

dove  $\zeta = \cos(\alpha)$ .

Per  $\zeta=0$ , si ha:

$$y(t) = \mu [1 - \cos(\omega_n t)]$$

ossia una cosinusoide di pulsazione  $\omega_n$ :

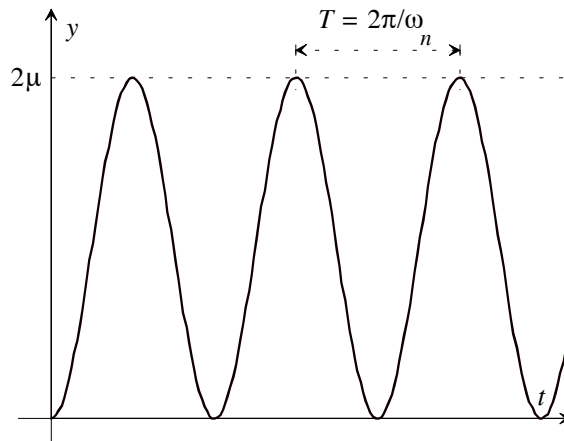


Fig. 18 : Risposta allo scalino per  $\zeta=0$

Per  $\zeta \neq 0$ , la risposta ha l'andamento di una sinusoide involuppata da due esponenziali (convergenti nel caso asintoticamente stabile,  $\zeta > 0$ , divergenti nel caso instabile,  $\zeta < 0$ ).

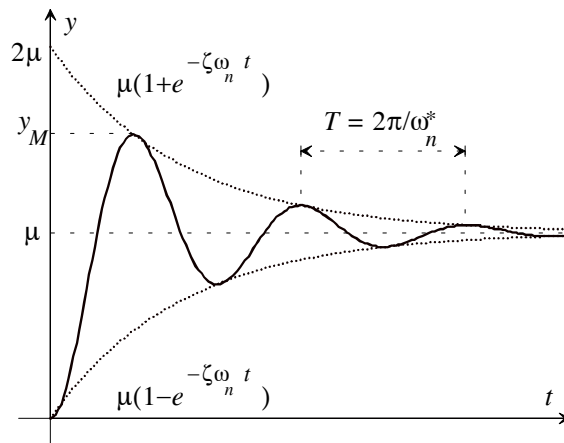


Fig. 19 : Risposta allo scalino per  $\zeta > 0$  ( $\omega_n^* = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ )

Si può dimostrare che, nel caso asintoticamente stabile, la *sovraelongazione percentuale massima*, ossia il rapporto percentuale tra l'escursione del primo picco della risposta rispetto al valore di regime ed il valore di regime stesso, dipende esclusivamente dal fattore di smorzamento  $\zeta$ :

$$S_E = 100 \frac{y_M - \mu}{\mu} = 100 e^{-\frac{\zeta \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

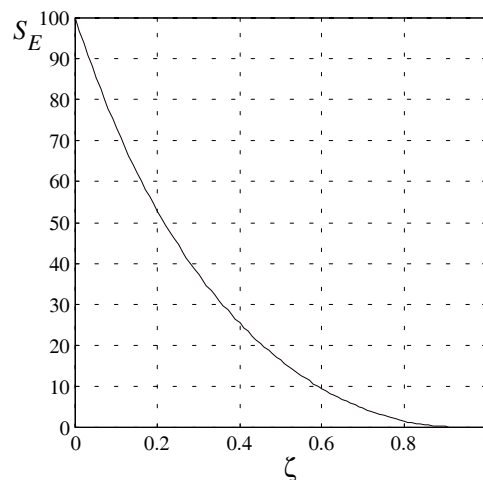


Fig. 19 : Sovraelongazione percentuale massima rispetto al fattore di smorzamento

Per fare in modo che la sovraelongazione percentuale massima sia inferiore ad un valore assegnato, occorrerà quindi che i poli del sistema appartengano ad un determinato settore del semipiano sinistro del piano complesso (come quello tratteggiato in figura):

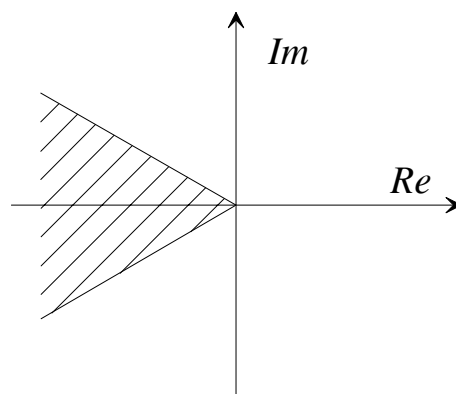


Fig. 20 : Settore del piano complesso per limitare la sovraelongazione

Il **tempo di assestamento** può invece essere determinato con buona approssimazione (per eccesso) facendo riferimento anziché alla risposta ad uno dei suoi involucri. Volendo quindi calcolare ad esempio il tempo di assestamento al 99% ( $T_{a1}$ ), si imporrà:

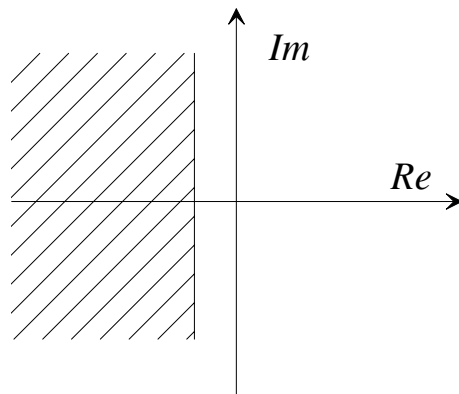
$$\mu(1 - e^{-\zeta \omega_n T_{a1}}) = 0.99\mu \Rightarrow e^{-\zeta \omega_n T_{a1}} = 0.01 \Rightarrow \zeta \omega_n T_{a1} = \ln 100$$

e quindi:

$$T_{a1} = \frac{\ln 100}{\zeta \omega_n} \approx \frac{4.6}{\zeta \omega_n}$$

Il tempo di assestamento risulta quindi inversamente proporzionale al modulo della **parte reale dei poli**. Per limitare il tempo di assestamento occorrerà quindi che i poli del sistema siano caratterizzati da un prodotto  $\zeta \omega_n$  sufficientemente grande, ossia che appartengano ad un

semipiano incluso nel semipiano sinistro del piano complesso sufficientemente lontano dall'asse immaginario (come quello tratteggiato in figura):



*Fig. 21 : Semipiano del piano complesso per limitare il tempo di assestamento*

Volendo contenere sia la sovraelongazione sia il tempo di assestamento, i poli della funzione di trasferimento dovranno trovarsi in una regione del piano complesso intersezione delle due regioni tratteggiate nelle precedenti figure.

## Esercizi

### ***Esercizio 4.1***

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{4}{s+2}$$

### ***Esercizio 4.2***

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1-0.5s}{1+s}$$

### ***Esercizio 4.3***

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)}$$

### ***Esercizio 4.4***

Si tracci l'andamento qualitativo della risposta allo scalino del sistema descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{18}{s^2+9}$$

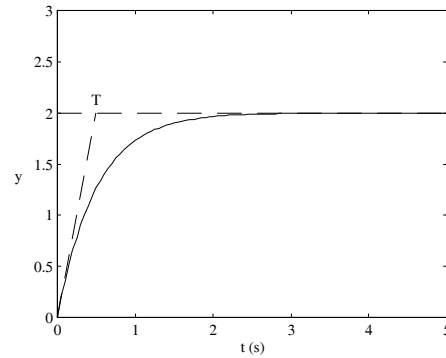
## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 4.1

$G(s)$  è della forma:

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + sT}$$

con  $\mu = 2$ ,  $T = 0.5$ . Pertanto:

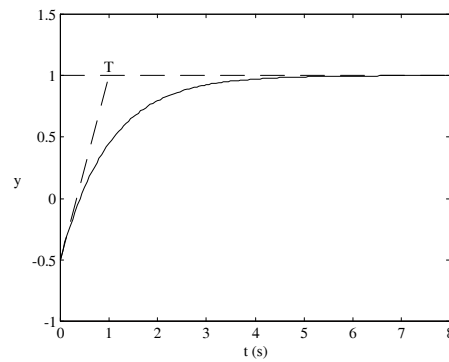


### Esercizio 4.2

$G(s)$  è della forma:

$$G(s) = \mu \frac{1 + s\tau}{1 + sT}$$

con  $\mu = 1$ ,  $T = 1$ ,  $\tau = -0.5$ . Pertanto:

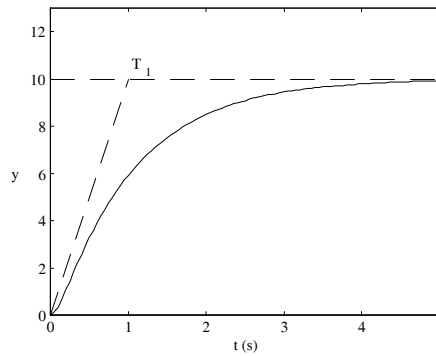


### Esercizio 4.3

$G(s)$  è della forma:

$$G(s) = \frac{\mu}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

con  $\mu = 10$ ,  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 0.1$ . Pertanto la risposta allo scalino è dominata dalla costante di tempo  $T_1$ :

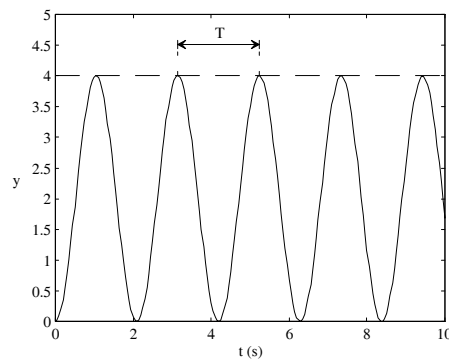


### Esercizio 4.4

$G(s)$  è della forma:

$$G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con  $\mu = 2$ ,  $\omega_n = 3$ ,  $\zeta = 0$ . Pertanto:



Il periodo  $T$  dell'oscillazione permanente vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2.094 \text{ s}$$



## *Lezione 5*

# Schemi a blocchi

## Elementi costitutivi di uno schema a blocchi

Gli schemi a blocchi costituiscono un formalismo per rappresentare graficamente le interazioni tra sistemi dinamici.

Vediamone gli elementi costitutivi:

### *Il blocco*

Il blocco non è altro che un simbolo indicante la presenza di un sistema dinamico, avente la funzione di trasferimento riportata nel simbolo del blocco, e l'ingresso e l'uscita riportati rispettivamente sulla freccia entrante e sulla freccia uscente dal blocco:

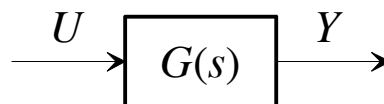


Fig. 1 : Un blocco

### *Il nodo sommatore*

L'uscita del nodo è data dalla somma algebrica dei segnali che entrano nel nodo, ciascuno preso con il proprio segno (se non è indicato il segno, si assume per convenzione il segno positivo).

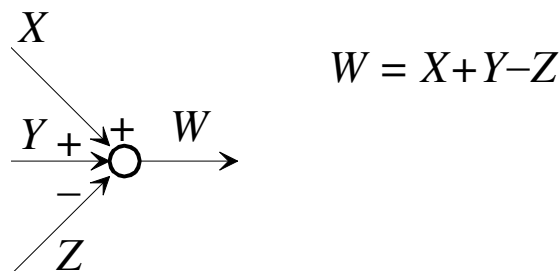


Fig. 2 : Un nodo sommatore

### *Il punto di diramazione*

Tutti i segnali uscenti da un punto di diramazione sono uguali al segnale entrante nel punto.

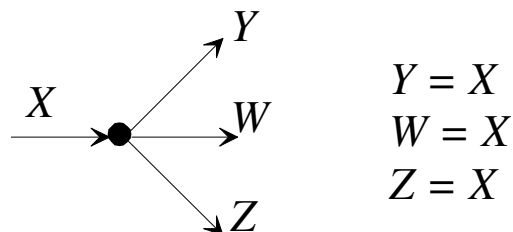


Fig. 3 : Un punto di diramazione

## Schemi di interconnessione

### Sistemi in cascata (o serie)

Due sistemi si dicono in cascata (o in serie) se l'uscita di uno è l'ingresso dell'altro.

Graficamente si ha la seguente situazione:

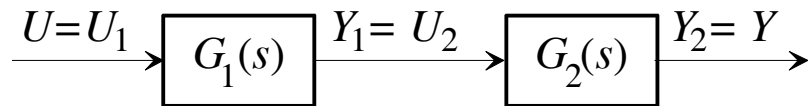


Fig. 4 : Blocchi in cascata

La funzione di trasferimento dall'ingresso del primo sistema all'uscita del secondo si ottiene come segue:

$$Y(s) = Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

Pertanto:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

La funzione di trasferimento del sistema costituito dalla cascata di due sottosistemi è quindi data dal **prodotto** delle due funzioni di trasferimento parziali.

### Sistemi in parallelo

Due sistemi si dicono in parallelo se hanno lo stesso ingresso, mentre le loro uscite si sommano (algebricamente) per determinare l'uscita del sistema risultante.

Graficamente si ha la seguente situazione:

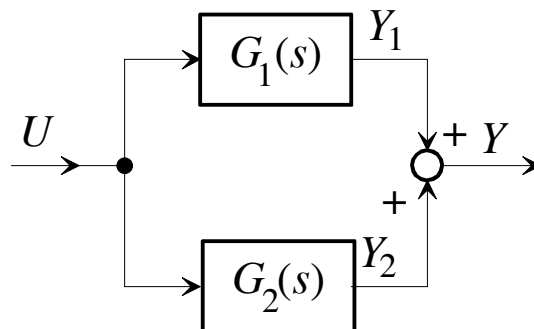


Fig. 5 : Blocchi in parallelo

La funzione di trasferimento dall'ingresso comune ai due sistemi all'uscita si ottiene come segue:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s) = [G_1(s) + G_2(s)]U(s)$$

Pertanto:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) + G_2(s)$$

La funzione di trasferimento del sistema costituito dal parallelo di due sottosistemi è quindi data dalla **somma algebrica** delle due funzioni di trasferimento parziali, ciascuna presa con il segno con cui la sua uscita entra nel nodo sommatore.

### **Sistemi in retroazione**

Due sistemi si dicono connessi in retroazione quando l'uscita del primo è l'ingresso del secondo, mentre l'uscita del secondo si somma o si sottrae ad un ingresso esterno per determinare l'ingresso del primo sistema.

Si hanno quindi due possibili schemi di connessione:

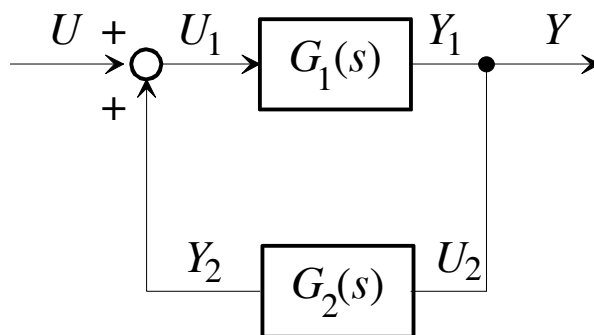


Fig. 6 : Blocchi in retroazione positiva

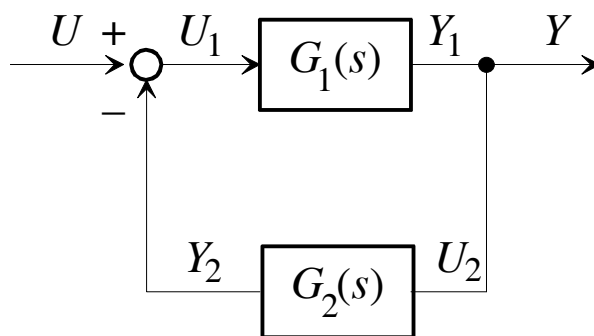


Fig. 7 : Blocchi in retroazione negativa

In entrambi i casi:

$G_1$ : funzione di trasferimento della **linea di andata**

$G_2$ : funzione di trasferimento della **linea di retroazione**

Consideriamo il caso di retroazione **positiva** e calcoliamo la funzione di trasferimento dall'ingresso  $U$  all'uscita  $Y$ :

$$\begin{aligned} Y(s) = Y_1(s) &= G_1(s)U_1(s) = G_1(s)[U(s) + Y_2(s)] = G_1(s)[U(s) + G_2(s)U_2(s)] = \\ &= G_1(s)[U(s) + G_2(s)Y(s)] = G_1(s)U(s) + G_1(s)G_2(s)Y(s) \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}$$

Analogamente, nel caso di retroazione **negativa**:

$$\begin{aligned} Y(s) = Y_1(s) &= G_1(s)U_1(s) = G_1(s)[U(s) - Y_2(s)] = G_1(s)[U(s) - G_2(s)U_2(s)] = \\ &= G_1(s)[U(s) - G_2(s)Y(s)] = G_1(s)U(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s) \end{aligned}$$

e quindi:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

La funzione di trasferimento  $G_1(s)G_2(s)$  prende il nome di **funzione di trasferimento d'anello**.

La regola per trovare la funzione di trasferimento del sistema complessivo (**sistema in anello chiuso**) è quindi la seguente :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{f.d.t. linea di andata}}{1 \mp \text{f.d.t. d'anello}} \quad \begin{array}{l} - : \text{retroazione positiva} \\ + : \text{retroazione negativa} \end{array}$$

## Stabilità degli schemi di interconnessione

### *Sistemi in cascata*

Siano:

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)},$$

le funzioni di trasferimento dei due sistemi in cascata, espresse come rapporti di polinomi.

La funzione di trasferimento del sistema complessivo sarà quindi:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D_2(s)}.$$

Il denominatore di  $G(s)$  è dato dal prodotto dei denominatori delle funzioni di trasferimento parziali: ne consegue che i poli del sistema complessivo sono la riunione dei poli dei due sottosistemi in cascata. Pertanto:

*Un sistema costituito dalla cascata di due o più sottosistemi è asintoticamente stabile se e solo se lo sono tutti i sottosistemi che compongono la cascata.*

Il precedente ragionamento non prevede la possibilità che vi siano radici di  $N_1$  uguali a radici di  $D_2$ , o radici di  $N_2$  uguali a radici di  $D_1$ , ossia che intervengano *cancellazioni* tra poli di una funzione di trasferimento e zeri dell'altra. Se viceversa tali cancellazioni avvengono, occorre porre attenzione al fatto che i poli cancellati siano o meno a parte reale negativa (ossia nel semipiano sinistro).

Se infatti tutti i poli cancellati sono nel semipiano sinistro, essi non hanno alcun ruolo nel determinare l'asintotica stabilità del sistema complessivo, che viene ovviamente a dipendere dai poli non cancellati. Se invece almeno uno dei poli cancellati non è nel semipiano sinistro, mentre tutti i poli non cancellati lo sono, si sarebbe indotti a ritenere che il sistema risultante sia asintoticamente stabile (il denominatore della funzione di trasferimento ottenuto a seguito delle cancellazioni presenterebbe tutte radici nel semipiano sinistro). In realtà una situazione di questo tipo corrisponderebbe alla presenza di una instabilità (o, comunque, non asintotica stabilità) *interna*: a seguito di una sollecitazione impulsiva all'ingresso, seppure la variabile di uscita del sistema si riporta, esaurito il transitorio, al valore di riposo, altre variabili interne possono crescere indefinitamente, o comunque non ritornare al valore di riposo.

Concludiamo quindi che la precedente affermazione sulla stabilità dei sistemi connessi in cascata è in realtà valida, facendo riferimento al concetto di stabilità interna, anche in presenza di cancellazioni tra poli e zeri.

### ***Sistemi in parallelo***

Siano:

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)},$$

le funzioni di trasferimento dei due sistemi in parallelo. La funzione di trasferimento del sistema complessivo sarà quindi (i segni con cui avviene la somma sono irrilevanti ai fini della stabilità):

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} + \frac{N_2(s)}{D_2(s)} = \frac{N_1(s)D_2(s) + N_2(s)D_1(s)}{D_1(s)D_2(s)}.$$

Anche in questo caso, il denominatore di  $G(s)$  è dato dal prodotto dei denominatori delle funzioni di trasferimento parziali: ne consegue che i poli del sistema complessivo sono la riunione dei poli dei due sottosistemi in cascata. Pertanto:

*Un sistema costituito dal parallelo di due o più sottosistemi è asintoticamente stabile se e solo se lo sono tutti i sottosistemi che compongono il parallelo.*

Un ragionamento analogo a quello sviluppato per i sistemi in cascata consente di concludere che l'affermazione è valida, con riferimento al concetto più generale di stabilità interna, anche in presenza di poli comuni tra le due funzioni di trasferimento (ovvero radici comuni di  $D_1$  e  $D_2$ , che comportano cancellazioni).

### ***Sistemi in retroazione***

Siano:

$$G_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)},$$

le funzioni di trasferimento dei due sistemi in retroazione. La funzione di trasferimento del sistema complessivo sarà quindi:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{N_1(s)}{D_1(s)}}{1 \mp \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \frac{N_2(s)}{D_2(s)}} = \frac{N_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) \mp N_1(s)N_2(s)},$$

con l'opportuno segno a seconda che si tratti di retroazione positiva o negativa.

Pertanto i poli del sistema in anello chiuso sono le radici del denominatore:

$$D_1(s)D_2(s) \mp N_1(s)N_2(s)$$

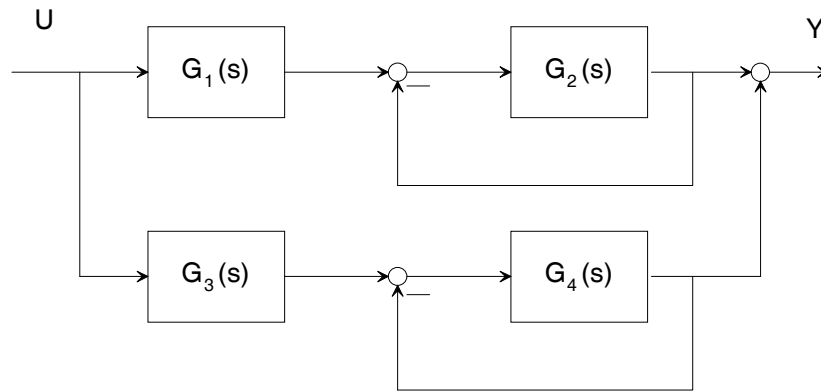
e non hanno nessuna relazione precisa con le radici dei polinomi  $D_1$  e  $D_2$ , ossia con i poli dei due sottosistemi interconnessi. Pertanto:

*Per un sistema costituito dalla retroazione di due sottosistemi non si può affermare nulla sulla asintotica stabilità del sistema in anello chiuso a partire dalla asintotica stabilità o meno dei due sistemi interconnessi.*

## Esercizi

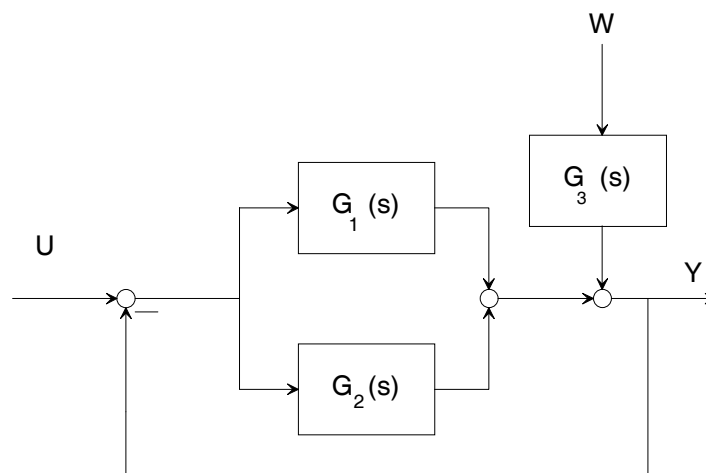
### Esercizio 5.1

Si calcoli la funzione di trasferimento da  $u$  a  $y$  per il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:



### Esercizio 5.2

Si calcoli il legame, in termini di funzioni di trasferimento dagli ingressi  $u$  e  $w$  all'uscita  $y$  per il sistema descritto dal seguente schema a blocchi:





## Traccia delle soluzioni

### *Esercizio 5.1*

Risolvendo lo schema a blocchi si ottiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G_1(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)} + G_3(s) \frac{G_4(s)}{1 + G_4(s)}$$

### *Esercizio 5.2*

Risolvendo lo schema a blocchi si ottiene:

$$Y(s) = \frac{G_1(s) + G_2(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s)} U(s) + \frac{G_3(s)}{1 + G_1(s) + G_2(s)} W(s)$$

## *Lezione 6*

# Risposta in frequenza

## Risposta sinusoidale

Consideriamo un generico sistema dinamico lineare, di funzione di trasferimento  $G(s)$ :

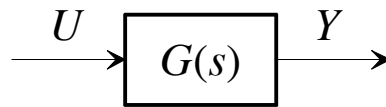


Fig. 1 : Un sistema dinamico lineare

ed imponiamo il seguente andamento sinusoidale all'ingresso  $u$

$$u(t) = A \sin(\bar{\omega}t + \varphi)$$

$A$ : ampiezza  
 $\bar{\omega}$ : pulsazione  
 $\varphi$ : fase (iniziale)

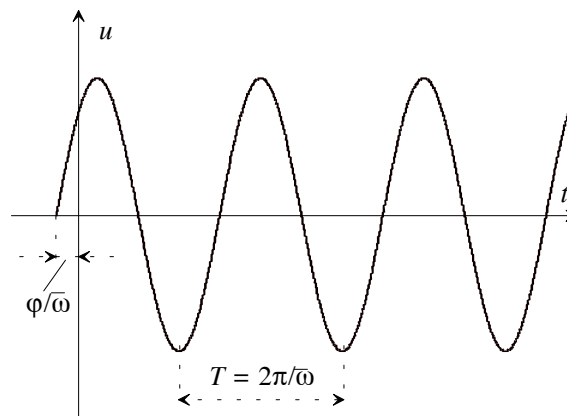


Fig. 2 : Ingresso sinusoidale

### Teorema della risposta in frequenza

Se il sistema è **asintoticamente stabile**, esaurito un transitorio iniziale, anche l'uscita è sinusoidale, con la stessa pulsazione della sinusoide in ingresso, e risulta in particolare:

$$y(t) = B \sin(\bar{\omega}t + \psi)$$

con

$$\begin{cases} B = A |G(j\bar{\omega})| \\ \psi = \varphi + \angle G(j\bar{\omega}) \end{cases}$$

dove  $j$  è l'unità immaginaria.

### Risposta in frequenza

Si definisce risposta in frequenza la seguente funzione complessa della variabile reale  $\omega$ :

$$G(j\omega), \quad \omega > 0.$$

A partire dall'espressione della funzione di trasferimento, l'espressione della risposta in frequenza si ottiene semplicemente sostituendo a  $s$  il prodotto  $j\omega$ , e limitando il campo di variabilità di  $\omega$  ai valori positivi.

Per l'applicazione del teorema della risposta in frequenza, per i sistemi asintoticamente stabili, occorre poi valutare il numero complesso  $G(j\omega)$  (e quindi il suo modulo e la sua fase) in corrispondenza ad un particolare valore di  $\omega$  (ossia in corrispondenza alla pulsazione della sinusoide in ingresso). Coerentemente con il significato assunto nel teorema, la variabile  $\omega$  prende il nome di **pulsazione**.

Si osservi che la definizione di risposta in frequenza si dà per tutti i sistemi lineari, indipendentemente dalla stabilità.

### *Esempio*

Sia:

$$G(s) = \frac{10}{1+s}, \quad u(t) = 2 \sin(5t + 0.3)$$

Il sistema è asintoticamente stabile, per cui il teorema è applicabile. L'espressione della risposta in frequenza è la seguente:

$$G(j\omega) = \frac{10}{1+j\omega} .$$

Siamo interessati a valutare la risposta in frequenza in corrispondenza della pulsazione  $\omega=5$ , ed in particolare il modulo e la fase del numero complesso risultante:

$$|G(j5)| = \left| \frac{10}{1+j5} \right| = \frac{10}{|1+j5|} = \frac{10}{\sqrt{1+25}} = \frac{10}{\sqrt{26}} = 1.961$$

$$\angle G(j5) = \angle \frac{10}{1+j5} = \angle 10 - \angle(1+j5) = 0 - \arctan(5) = -1.373$$

In base al teorema della risposta in frequenza, risulterà quindi, a transitorio esaurito:

$$y(t) = 2|G(j5)| \sin(5t + 0.3 + \angle G(j5)) = 3.922 \sin(5t - 1.073) .$$

## Rappresentazione grafica della risposta in frequenza

Come tutte le funzioni, la risposta in frequenza è suscettibile di rappresentazione grafica. Occorre tuttavia considerare la risposta in frequenza è una funzione complessa della variabile reale  $\omega$ . Sono allora utilizzabili varie forme di rappresentazione grafica, tra le quali assumono rilevanza le seguenti due:

### *Diagrammi polari*

Per ogni valore di  $\omega$  si riporta il punto nel piano complesso  $G(j\omega)$ . Congiungendo i punti si ottiene una linea che prende il nome di diagramma polare.

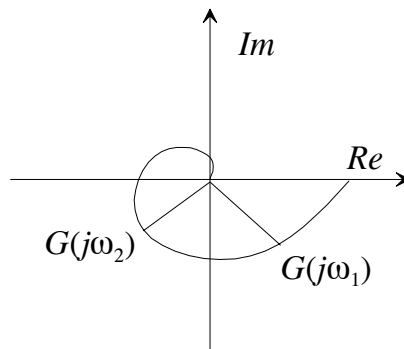


Fig. 3 : Diagramma polare

### *Diagrammi Cartesiani*

Si tratta di una coppia di diagrammi, che rappresentano il modulo e la fase della risposta in frequenza rispetto alla pulsazione  $\omega$ :

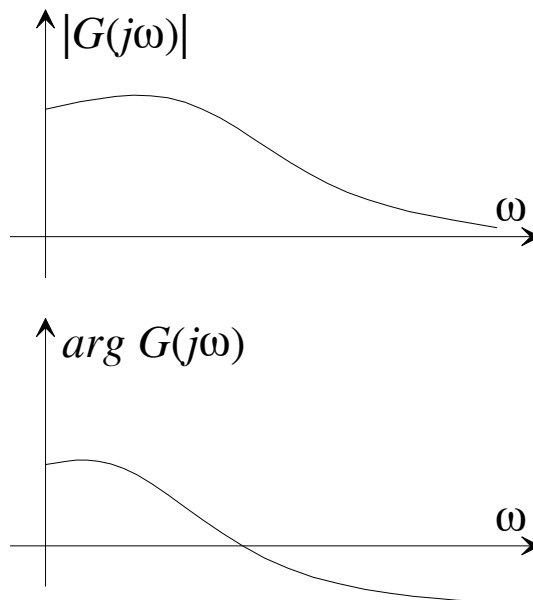


Fig. 4 : Diagrammi Cartesiani

## Diagrammi di Bode

I **diagrammi di Bode** sono una coppia di diagrammi Cartesiani della risposta in frequenza, in cui le scale degli assi dell'ascissa e dell'ordinata sono scelte secondo un opportuno criterio che facilita il tracciamento dei diagrammi.

Sia nel diagramma del modulo che nel diagramma della fase l'asse delle ascisse (ossia l'asse delle pulsazioni) è in **scala logaritmica**. La distanza tra due generici punti che rappresentano le pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  è proporzionale alla differenza tra i logaritmi di  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . In altre parole, date quattro pulsazioni  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  e  $\omega_4$  tali che:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_4}{\omega_3},$$

la distanza sulla scala logaritmica tra  $\omega_1$  e  $\omega_2$  è uguale alla distanza tra  $\omega_3$  e  $\omega_4$ :



Fig. 5 : Scala logaritmica

In particolare la distanza tra due pulsazioni aventi rapporto pari a dieci prende il nome di **decade**:

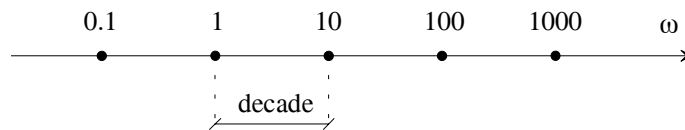


Fig. 6 : Decadi

Nel **diagramma del modulo** si rappresenta sull'asse delle ordinate il modulo in **decibel**, ossia il logaritmo in base 10 del modulo, moltiplicato per il fattore 20:

$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log_{10} \left|G(j\omega)\right|.$$

I valori del modulo in decibel vengono poi rappresentati su una scala lineare. Pertanto il diagramma del modulo viene tracciato su una **carta semilogaritmica**:

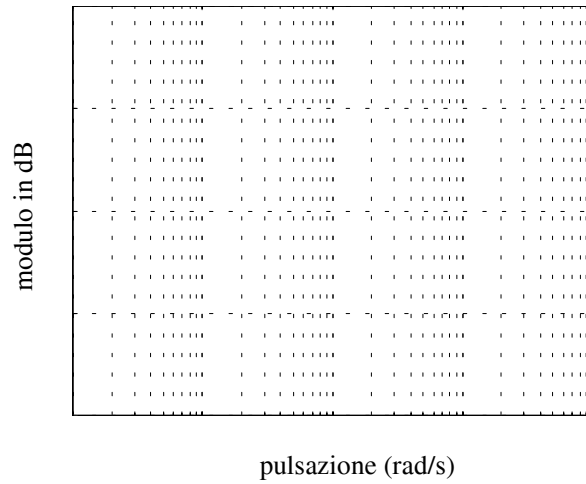


Fig. 7 : Diagramma del modulo in carta semilogaritmica

Nel **diagramma della fase** si rappresenta sull'asse delle ordinate la fase della risposta in frequenza in gradi, su scala lineare. Anche questo diagramma va quindi tracciato su carta semilogaritmica:

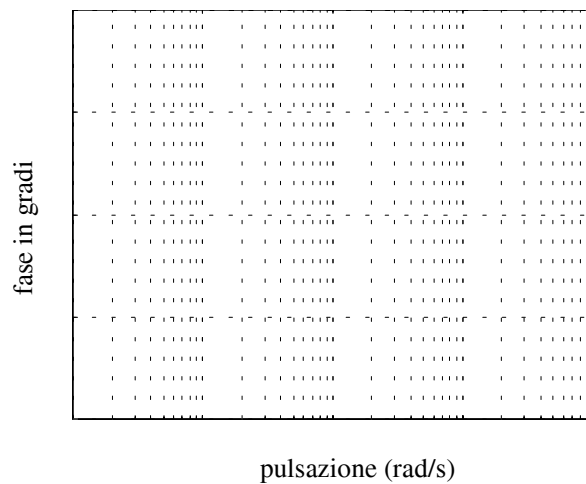


Fig. 8 : Diagramma della fase in carta semilogaritmica

## Diagramma di Bode del modulo

Per una generica funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + s\tau_i)}{s^g \prod_k (1 + s\tau_k)}$$

il modulo della risposta in frequenza assume l'espressione:

$$|G(j\omega)| = \frac{|\mu| \prod_i |1 + j\omega\tau_i|}{|j\omega|^g \prod_k |1 + j\omega\tau_k|}$$

Il modulo in decibel si scriverà quindi come:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| &= 20 \log_{10} |\mu| + 20 \log_{10} \frac{1}{|j\omega|^g} \\ &+ \sum_i 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau_i| + \sum_k 20 \log_{10} \frac{1}{|1 + j\omega\tau_k|} \end{aligned}$$

Vediamo come si tracciano i diagrammi dei singoli addendi di questa somma.

### Guadagno

$$G(s) = \mu \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |\mu|$$

Si tratta di una retta orizzontale.

Esempi:

$$\mu = 100 \Rightarrow |\mu|_{dB} = 40$$

$$\mu = -10 \Rightarrow |\mu|_{dB} = 20$$

$$\mu = 0.1 \Rightarrow |\mu|_{dB} = -20$$

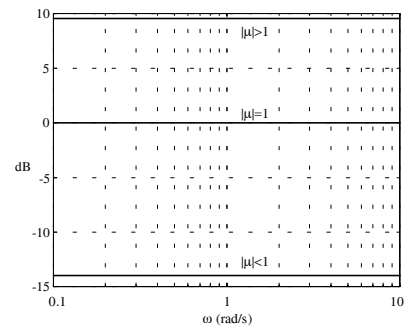


Fig 9 : Diagr. del modulo del guadagno

### Zeri e poli nell'origine

$$G(s) = \frac{1}{s^g} \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{|j\omega|^g} = -20g \log_{10} \omega$$

Si tratta di una retta di pendenza  $-20g$  dB/decade, che taglia l'asse a 0 dB per  $\omega=1$ .

Si dice anche che la retta ha pendenza  $-g$ .

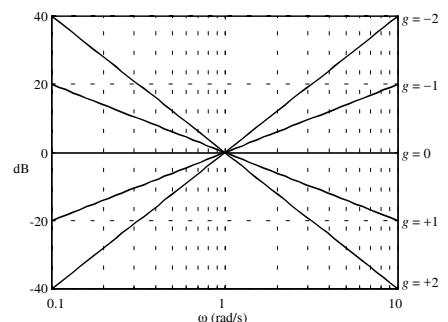


Fig 10 : Diagr. del modulo di zeri/poli in  $s=0$



### Zeri e poli reali

$$G(s) = (1 + s\tau)^{\pm 1} \Rightarrow$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = \pm 20 \log_{10} |1 + j\omega\tau| = \pm 20 \log_{10} \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}$$

Per facilitare il tracciamento a mano si introducono i diagrammi asintotici.

$$|G(j\omega)|_{dB} \approx \begin{cases} 20 \log_{10} 1 = 0 & \omega \leq 1/|\tau| \\ \pm 20 \log_{10} |\omega\tau| & \omega > 1/|\tau| \end{cases}$$

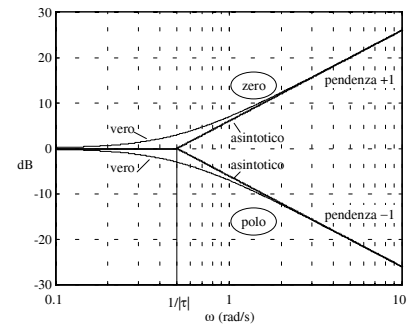


Fig 11 : Diagr. del modulo di poli/zeri reali

L'errore massimo tra diagramma vero ed asintotico si ha per  $\omega = 1/|\tau|$ , e vale  $20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3dB$ .

Il diagramma è del tutto indipendente dal segno di  $\tau$ .

Se vi sono più zeri (poli) reali coincidenti, i diagrammi si sommano.

### Zeri e poli complessi e coniugati

$$G(s) = [(1 + s\tau)(1 + s\bar{\tau})]^{\pm 1} = \left[ 1 + 2 \frac{\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right]^{\pm 1} \Rightarrow$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = \pm 20 \log_{10} \sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

I diagrammi asintotici si tracciano sostituendo ai due zeri (poli) due zeri (poli) reali coincidenti alla pulsazione  $\omega_n$ . L'approssimazione è buona solo per valori di  $|\zeta|$  elevati ( $|\zeta| > 0.5$ ). Il diagramma non dipende dal segno di  $\zeta$ .

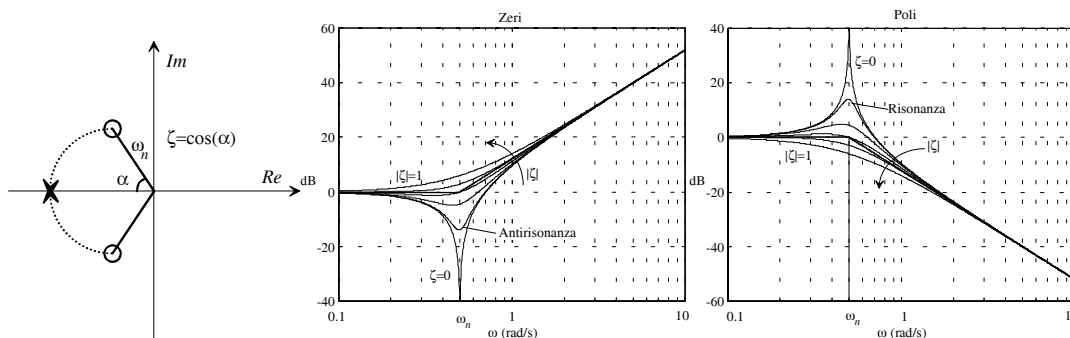


Fig.12 : Diagrammi del modulo di poli/zeri complessi e coniugati

### Esempio di tracciamento

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1-s}{(1+0.1s)^2}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = \overset{(1)}{20\log_{10}|10|} + \overset{(2)}{20\log_{10}\frac{1}{|j\omega|}} + \overset{(3)}{20\log_{10}|1-j\omega|} + \overset{(4)}{20\log_{10}\frac{1}{|1+j0.1\omega|^2}}$$

Sommando i singoli addendi si ottiene il diagramma asintotico di Bode del modulo della risposta in frequenza:

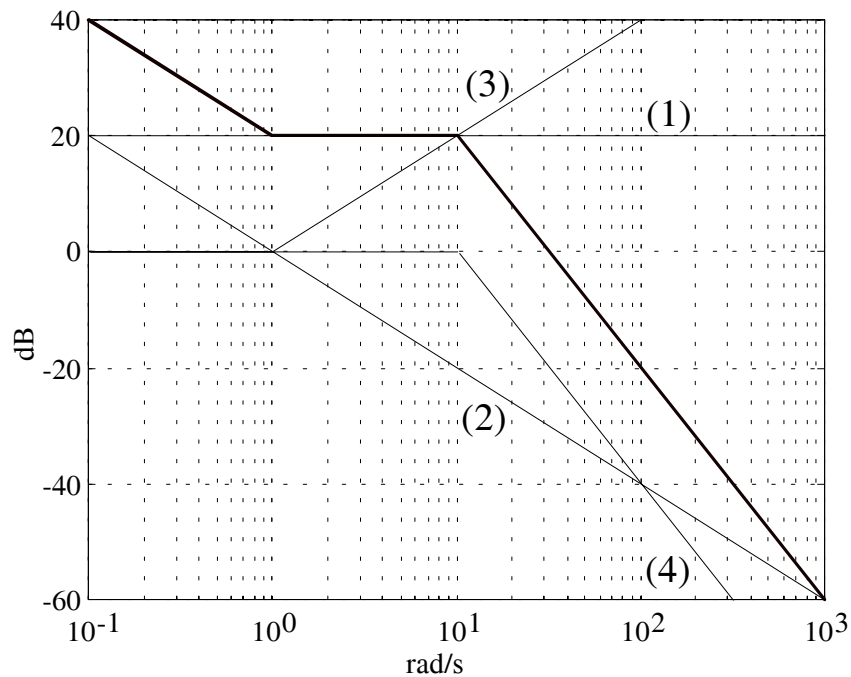


Fig. 13 : Diagramma di Bode del modulo

Per il **tracciamento veloce** del diagramma asintotico del modulo, ci si può servire delle seguenti **regole pratiche**:

1. A bassa frequenza ( $\omega \rightarrow 0$ ) il diagramma giace sulla retta di pendenza  $-g$ , passante per il punto  $[\omega = 1; |G|_{dB} = |\mu|_{dB}]$ .
2. Ad ogni pulsazione corrispondente a  $p$  poli (zeri) reali, la pendenza diminuisce (aumenta) di  $p$  unità.
3. Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di  $p$  coppie di poli (zeri) complessi e coniugati, la pendenza diminuisce (aumenta) di  $2p$  unità.
4. La pendenza finale è pari al numero degli zeri meno il numero dei poli (regola di verifica).

## Diagramma di Bode della fase

Per una generica funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + s\tau_i)}{s^g \prod_k (1 + s\tau_k)}$$

la fase della risposta in frequenza assume l'espressione:

$$\angle G(j\omega) = \angle \mu + \angle \frac{1}{(j\omega)^g} + \sum_i \angle (1 + j\omega\tau_i) + \sum_k \angle \frac{1}{1 + j\omega\tau_k}$$

Vediamo come si tracciano i diagrammi dei singoli addendi di questa somma.

### Guadagno

$$G(s) = \mu \Rightarrow \angle G(j\omega) = \angle \mu = \begin{cases} 0 & \mu \geq 0 \\ -180 & \mu < 0 \end{cases}$$

Si tratta di una retta orizzontale.

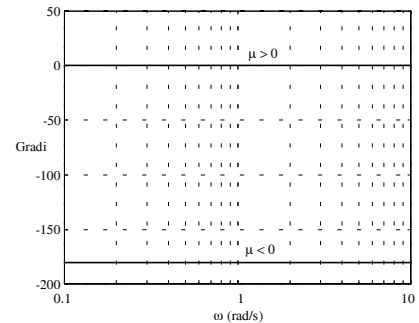


Fig. 14 : Diagr. della fase del guadagno

### Zeri e poli nell'origine

$$G(s) = \frac{1}{s^g} \Rightarrow$$

$$\angle G(j\omega) = \angle \frac{1}{(j\omega)^g} = -\angle (j\omega)^g = -g \angle (j\omega) = -g \cdot 90^\circ$$

Si tratta di una retta orizzontale. Ad esempio un polo nell'origine ( $g=1$ ), ossia un integratore, dà un contributo di fase costante pari a  $-90^\circ$ .

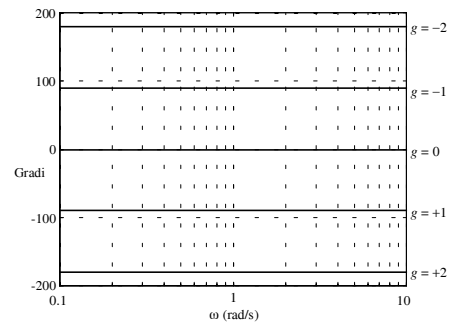


Fig. 15: Diagr. della fase di zeri/poli in  $s=0$

### Zeri e poli reali

$$G(s) = (1 + s\tau)^{\pm 1} \Rightarrow$$

$$\angle G(j\omega) = \angle(1 + j\omega\tau)^{\pm 1} = \pm \angle(1 + j\omega\tau) = \pm \arctan(\omega\tau)$$

Per facilitare il tracciamento a mano si introducono i diagrammi asintotici.

$$\angle G(j\omega) \approx \begin{cases} \angle 1 = 0 & \omega \leq 1/|\tau| \\ \pm \angle(j\omega\tau) & \omega > 1/|\tau| \end{cases}$$

Il diagramma dipende dal segno di  $\tau$ . Infatti:

$$\angle(j\omega\tau) = \begin{cases} 90^\circ & \tau > 0 \\ -90^\circ & \tau < 0 \end{cases}$$

Se vi sono più zeri (poli) reali coincidenti, i diagrammi si sommano.

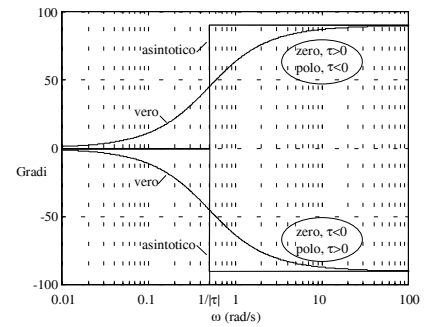


Fig. 16 : Diagr. della fase di zeri/poli reali

### Zeri e poli complessi e coniugati

$$G(s) = [(1 + s\tau)(1 + s\bar{\tau})]^{\pm 1} = \left[ 1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2} \right]^{\pm 1} \Rightarrow \angle G(j\omega) = \pm \arctan \left( \frac{\frac{2\zeta}{\omega_n}\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}} \right)$$

I diagrammi asintotici si tracciano sostituendo ai due zeri (poli) due zeri (poli) reali coincidenti alla pulsazione  $\omega_n$ . L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccoli sono i valori di  $|\zeta|$ . Il diagramma dipende dal segno di  $\zeta$ .

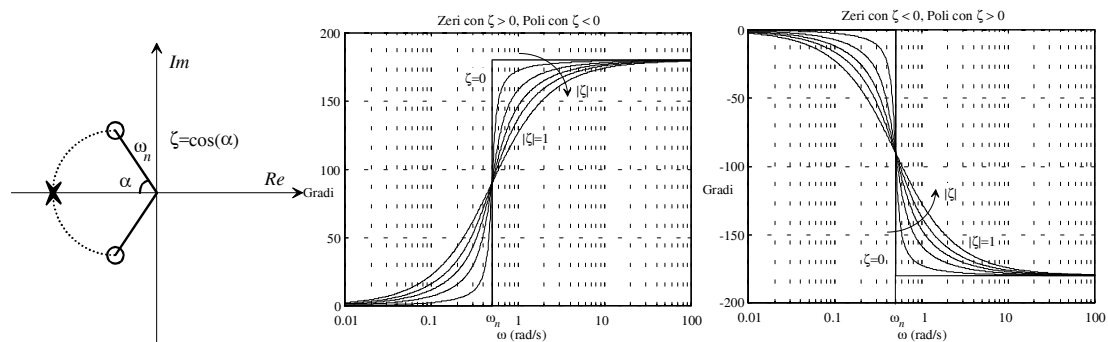


Fig. 17 : Diagrammi della fase di zeri/poli complessi e coniugati

### Esempio di tracciamento

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1-s}{(1+0.1s)^2}$$

$$\angle G(j\omega) = \overset{(1)}{\angle 10} + \overset{(2)}{\angle \frac{1}{j\omega}} + \overset{(3)}{\angle (1-j\omega)} + \overset{(4)}{\angle \frac{1}{(1+j0.1\omega)^2}}$$

Sommando i singoli addendi si ottiene il diagramma asintotico di Bode della fase della risposta in frequenza:

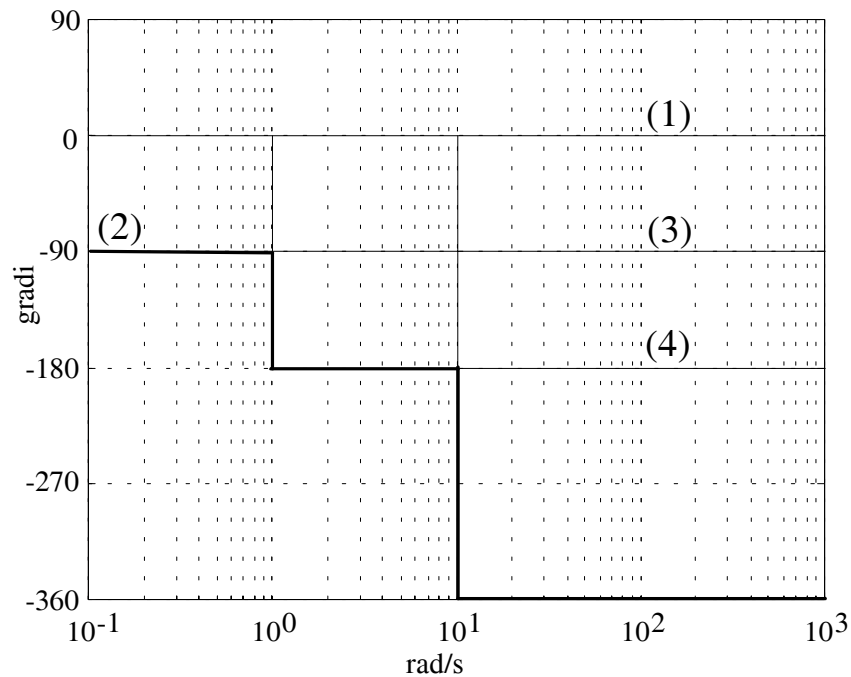


Fig. 18 : Diagramma di Bode della fase

Per il **tracciamento veloce** del diagramma asintotico della fase, ci si può servire delle seguenti **regole pratiche**:

1. A bassa frequenza ( $\omega \rightarrow 0$ ) il diagramma giace sulla retta orizzontale di ordinata  $\angle \mu - g90^\circ$ .
2. Ad ogni pulsazione corrispondente a  $p$  zeri reali nel semipiano sinistro o  $p$  poli reali nel semipiano destro, il diagramma ha un salto positivo di  $p90^\circ$ .
3. Ad ogni pulsazione corrispondente a  $p$  zeri reali nel semipiano destro o  $p$  poli reali nel semipiano sinistro, il diagramma ha un salto negativo di  $p90^\circ$ .
4. Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di  $p$  coppie di zeri complessi e coniugati nel semipiano sinistro o  $p$  coppie di poli complessi e coniugati nel semipiano destro, il diagramma ha un salto positivo di  $p180^\circ$ .
5. Ad ogni pulsazione corrispondente alla pulsazione naturale di  $p$  coppie di zeri complessi e coniugati nel semipiano destro o  $p$  coppie di poli complessi e coniugati nel semipiano sinistro, il diagramma ha un salto negativo di  $p180^\circ$ .

## Regolo delle fasi

Per il calcolo preciso della fase di una risposta in frequenza ad una determinata pulsazione  $\bar{\omega}$ , assumendo la funzione di trasferimento dotata solo di poli o zeri reali (o di poli e zeri complessi ad elevato smorzamento, approssimati con poli e zeri reali), occorrerà calcolare la seguente espressione:

$$\angle G(j\bar{\omega}) = \angle \mu - g90^\circ + \sum_i \arctan(1 + j\bar{\omega}\tau_i) - \sum_k \arctan(1 + j\bar{\omega}\tau_k)$$

dove gli arcotangenti sono espressi in gradi.

Volendo evitare il calcolo delle funzioni arcotangenti si può utilizzare uno strumento di calcolo manuale, detto **regolo delle fasi**, costituito da un righello sul quale sono tabulati i valori della funzione arcotangente.

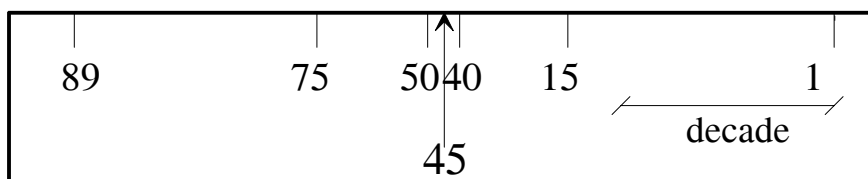


Fig. 19 : Regolo delle fasi

L'uso del regolo è molto semplice:

1. Si verifica, anzitutto, che l'ampiezza della decade riportata sul regolo sia congruente con l'ampiezza della decade della carta semilogaritmica sulla quale si sta tracciando il diagramma di Bode;
2. Si posiziona il regolo lungo l'asse delle pulsazioni, con la freccia (dei 45°) in corrispondenza della pulsazione  $\bar{\omega}$ ;
3. Per ciascun polo o zero di costante di tempo  $\tau$ , si individua sull'asse delle pulsazioni il valore  $1/|\tau|$  e si legge il valore riportato sul regolo in corrispondenza di tale pulsazione;
4. Si sommano i contributi così ricavati, avendo cura di attribuire a ciascun contributo il giusto segno (a seconda che si tratti di un polo o uno zero e che esso si trovi nel semipiano destro o sinistro);
5. Si somma il contributo  $\angle \mu - g90^\circ$ .

## Azione filtrante dei sistemi dinamici

Per i sistemi dinamici lineari asintoticamente stabili si è visto che la risposta in frequenza consente di calcolare la risposta a transitorio esaurito a ingressi sinusoidali. Questo risultato si può estendere a categorie di ingressi più generali.

### *Ingressi periodici*

Si consideri un ingresso periodico  $u(t)$ :

$$u(t+T) = u(t), \quad \forall t.$$

Sotto ipotesi molto generali, tra cui l'assoluta integrabilità nel periodo,

$$\int_0^T |u(t)| dt < \infty,$$

è noto che il segnale è suscettibile di sviluppo in serie di sinusoidi (**serie di Fourier**):

$$u(t) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

I coefficienti  $U_n$  e  $\varphi_n$  prendono il nome di coefficienti di Fourier di  $u$  ed il loro calcolo non è qui riportato.

Risulta allora che, esaurito un transitorio, anche l'uscita è periodica, con lo stesso periodo dell'ingresso, e si può scrivere:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cos(n\omega_0 t + \psi_n),$$

con:

$$\begin{cases} Y_n = |G(jn\omega_0)| U_n \\ \psi_n = \varphi_n + \angle G(jn\omega_0) \end{cases}$$

In altre parole il teorema della risposta in frequenza vale per tutte le sinusoidi in cui è scomponibile il segnale di ingresso.

### *Ingressi aperiodici*

Si consideri un ingresso aperiodico  $u(t)$ :

$$\nexists T: u(t+T) = u(t), \quad \forall t.$$

Sotto ipotesi molto generali, tra cui l'assoluta integrabilità del segnale,

$$\int_0^{\infty} |u(t)| dt < \infty,$$

è noto che il segnale è suscettibile di sviluppo in integrale di sinusoidi (**integrale di Fourier**):

$$u(t) = \int_0^{\infty} U(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) d\omega.$$

Le funzioni  $U(\omega)$  e  $\varphi(\omega)$  costituiscono la trasformata di Fourier di  $u$  ed il loro calcolo non è qui riportato.

Risulta allora che, esaurito un transitorio, anche l'uscita è esprimibile con un integrale di Fourier:

$$y(t) = \int_0^{\infty} Y(\omega) \cos(\omega t + \psi(\omega)) d\omega ,$$

con:

$$\begin{cases} Y(\omega) = |G(j\omega)|U(\omega) \\ \psi(\omega) = \varphi(\omega) + \angle G(\omega) \end{cases} .$$

In altre parole il teorema vale per tutte le sinusoidi in cui è scomponibile il segnale di ingresso.

La risposta in frequenza consente quindi di calcolare la risposta a qualsiasi ingresso, poiché determina come si modificano le componenti armoniche dell'ingresso. In questo senso un sistema dinamico asintoticamente stabile si può vedere sempre come un **filtro**.

Particolare rilevanza assume una tipologia di filtro che prende il nome di **filtro passabasso**. Si tratta di un sistema dinamico asintoticamente stabile, che per semplicità considereremo a guadagno unitario, caratterizzato da un modulo della risposta in frequenza del tipo di quello riportato in figura:

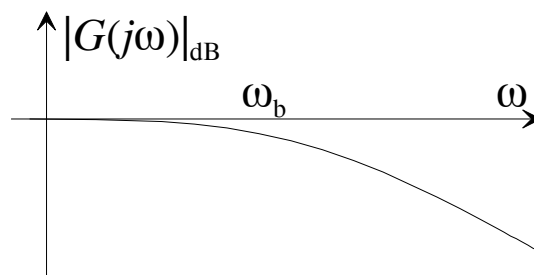


Fig. 20 : Diagramma del modulo di un filtro passabasso

Se risulta:

$$|G(j\omega)|_{dB} < -3, \forall \omega ,$$

ossia se il sistema non presenta risonanze, definiamo **banda passante** del filtro l'insieme di pulsazioni:

$$\{\omega: |G(j\omega)|_{dB} > -3\} = [0, \omega_b] ,$$

con  $\omega_b$  estremo superiore della banda passante.

Un filtro passabasso, quindi, lascia passare le armoniche le cui pulsazioni sono interne alla sua banda passante ed attenua le altre.



## Esercizi

### **Esercizio 6.1**

Si scriva l'espressione dell'andamento di regime dell'uscita  $y(t)$  del sistema dinamico descritto dalla funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

soggetto all'ingresso  $u(t) = 3 \sin(t)$ .

### **Esercizio 6.2**

Si dica se è possibile che, a transitorio esaurito, l'uscita di un sistema asintoticamente stabile soggetto all'ingresso:

$$u(t) = \sin(t) + \sin(2t)$$

assuma l'espressione:

$$y(t) = B \sin(3t + \beta),$$

con  $B$  e  $\beta$  costanti opportune.

### **Esercizio 6.3**

Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{(1+0.1s)(1+s)}$$

### **Esercizio 6.4**

Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1+s}{1-0.1s}$$

### **Esercizio 6.5**

Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0.2s + 1}$$

### **Esercizio 6.6**

Si traccino i diagrammi di Bode asintotici del modulo e della fase per la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1000}{(1+0.1s)(1-s)(1+10s)}$$

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 6.1

Utilizzando il teorema della risposta in frequenza, si ottiene, a transitorio esaurito:

$$y(t) = 3|G(j)| \sin[t + \arg(G(j))]$$

Poiché:

$$G(j) = \frac{1}{2+j} ,$$

si ha:

$$|G(j)| = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \arg(G(j)) = -\arctan(0.5) = -0.464 ,$$

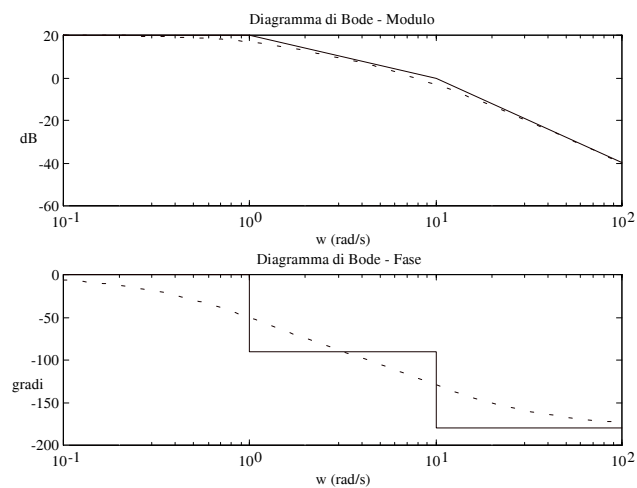
da cui:

$$y(t) = \frac{3}{\sqrt{5}} \sin[t - 0.464] .$$

### Esercizio 6.2

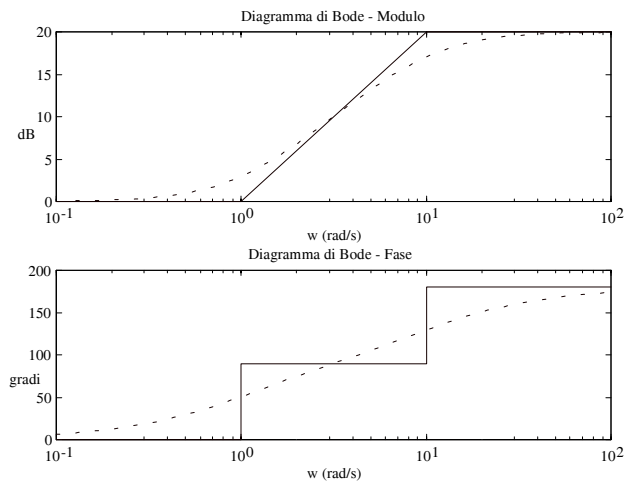
Non è possibile, in quanto, in base al teorema della risposta in frequenza ed al principio di sovrapposizione degli effetti, l'uscita sarà una combinazione lineare di due sinusoidi di pulsazioni 1 e 2 rad/s.

### Esercizio 6.3 <sup>1</sup>

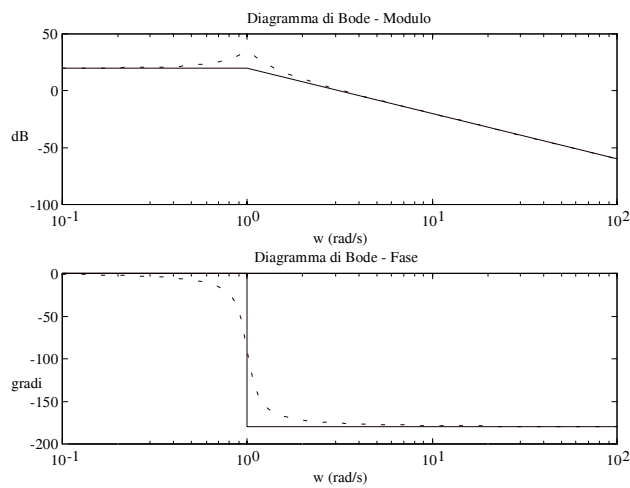


<sup>1</sup> Nelle figure sono riportati, con linea tratteggiata, anche i diagrammi di Bode esatti.

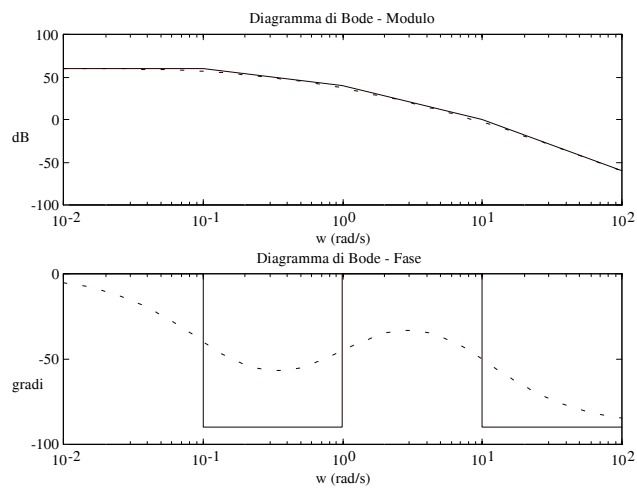
### Esercizio 6.4



### Esercizio 6.5



### Esercizio 6.6



## *Lezione 7*

# Requisiti di un sistema di controllo

## Componenti di uno schema di controllo

Esaurita la trattazione dei sistemi dinamici, si torna ora al problema di controllo, che aveva dato origine a tale studio. In figura è riportata la struttura tipica di un sistema di controllo in retroazione:

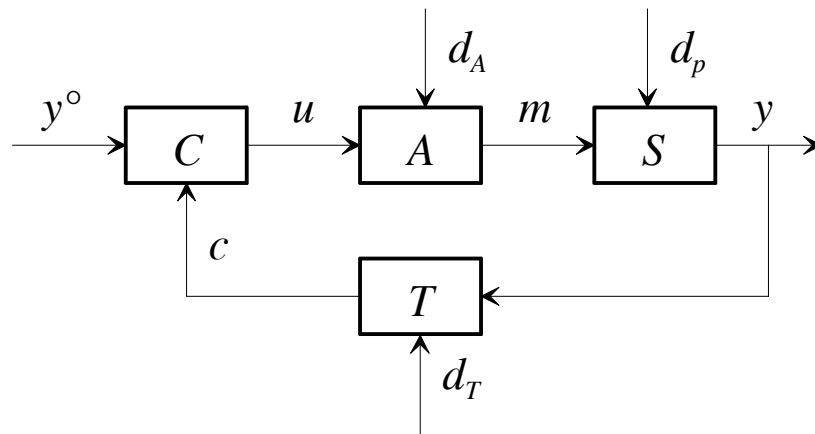


Fig. 1 : Sistema di controllo completo di strumentazione

dove:

**S: sistema sotto controllo (o processo)**

**T: trasduttore**

**A: attuatore**

**C: controllore (o regolatore)**

### Sistema sotto controllo

E' l'oggetto dello studio delle precedenti lezioni. Su di esso si interviene attraverso la variabile manipolabile  $m$  ed il suo comportamento è influenzato dal disturbo  $d_p$ . La sua uscita è la variabile controllata  $y$ . Se il sistema è lineare, le sue proprietà dinamiche possono essere espresse per mezzo di due funzioni di trasferimento<sup>1</sup>:

$$y(s) = P(s) m(s) + H(s) d_p(s).$$

### Trasduttore

E' lo strumento che misura una grandezza fisica del sistema sotto controllo (la variabile controllata  $y$ ) e ne invia la misura  $c$  al controllore, in una forma compatibile con la sua tecnologia. E' generalmente caratterizzabile con due proprietà, *precisione* e *ripetibilità*.

Si può distinguere tra *precisione statica* (a transitorio esaurito il segnale che esprime la misura della grandezza è proporzionale al valore assunto dalla grandezza stessa) e *precisione dinamica* (velocità del transitorio con il quale lo strumento reagisce a variazioni nella

---

<sup>1</sup>Indicheremo con lo stesso simbolo una variabile funzione del tempo e la sua trasformata di Laplace.

grandezza misurata). La *ripetibilità* invece è la proprietà per cui il comportamento del trasduttore, sia statico che dinamico, non varia nel tempo.

Se il comportamento dinamico del trasduttore è approssimabile a quello di un sistema dinamico lineare, la relazione che intercorre tra le trasformate della grandezza controllata  $y$  e della misura  $c$  è esprimibile per mezzo di una funzione di trasferimento e può essere affetta da un disturbo:

$$c(s) = T(s) y(s) + d_T(s)$$

Se il trasduttore è ripetibile,  $T(s)$  non varia nel tempo. In tal caso è anche possibile individuare un andamento desiderato della misura  $c^\circ$ , elaborando con un sistema di funzione di trasferimento  $T(s)$  l'andamento desiderato  $y^\circ$ :

$$c^\circ(s) = T(s) y^\circ(s).$$

### **Attuatore**

L'attuatore traduce l'azione di controllo elaborata dal controllore, ed espressa dalla variabile di controllo  $u$ , in un'azione efficace sulla variabile manipolabile  $m$ . Ad esso è quindi di norma associato uno stadio di *amplificazione di potenza* ed eventualmente di *conversione di potenza* (si pensi ad un motore elettrico che converte potenza elettrica in potenza meccanica).

Anche per gli attuatori ipotizzeremo un comportamento dinamico lineare affetto da disturbo, per cui:

$$m(s) = A(s) u(s) + d_A(s).$$

### **Controllore**

Il controllore riceve in ingresso la misura  $c$  della variabile controllata ed il relativo segnale di riferimento  $c^\circ$ . Dovendo rendere questi due segnali quanto più possibile simili, è naturale che il controllore agisca sulla loro differenza, ossia sull'errore  $e_c = c^\circ - c$ . Ipotizzeremo che anche il controllore abbia un comportamento dinamico lineare, per cui si avrà:

$$u(s) = R(s) e_c(s).$$

Alla luce delle precedenti considerazioni, siamo in grado di riformulare un problema di controllo sulla base di uno schema a blocchi di sistemi dinamici lineari:

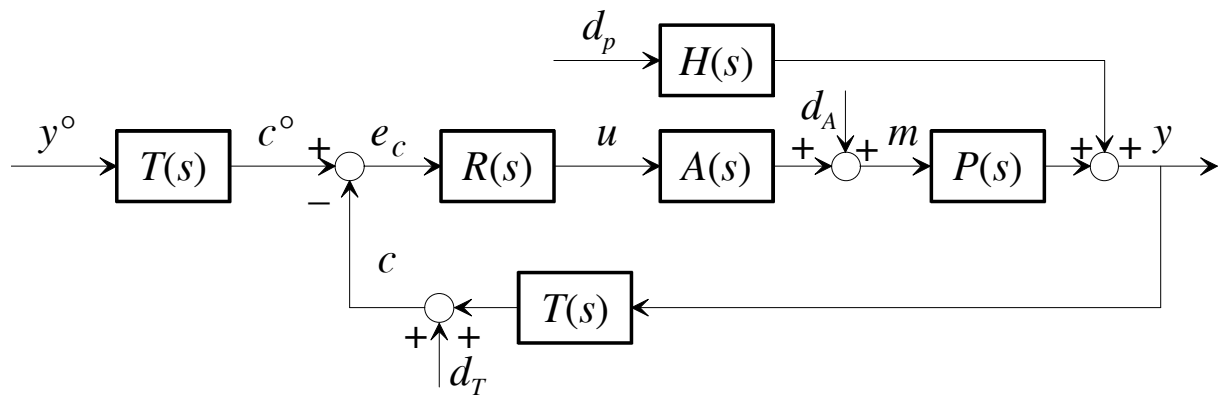


Fig. 2 : Sistema di controllo lineare

Ipotizzeremo le funzioni di trasferimento  $P(s)$ ,  $H(s)$ ,  $T(s)$  e  $A(s)$  date, insieme con l'andamento del segnale di riferimento  $y^o$ . L'incognita del problema sarà la funzione di trasferimento  $R(s)$ .

## Formalizzazione del problema di controllo

Lo schema a blocchi di Fig. 2 può essere semplificato osservando che l'effetto dei due disturbi  $d_p$  e  $d_A$  in linea di andata equivale all'effetto di un unico disturbo  $d$  riportato direttamente sull'uscita del processo:

$$d(s) = P(s) d_A(s) + H(s) d_p(s).$$

Inoltre osserviamo che:

$$e_c(s) = c^o(s) - c(s) = T(s)y^o(s) - T(s)y(s) - d_T(s) = T(s)[y^o(s) - y(s) - n(s)],$$

dove:

$$n(s) = T(s)^{-1} d_T(s).$$

Si ottiene quindi lo schema a blocchi riportato di seguito:

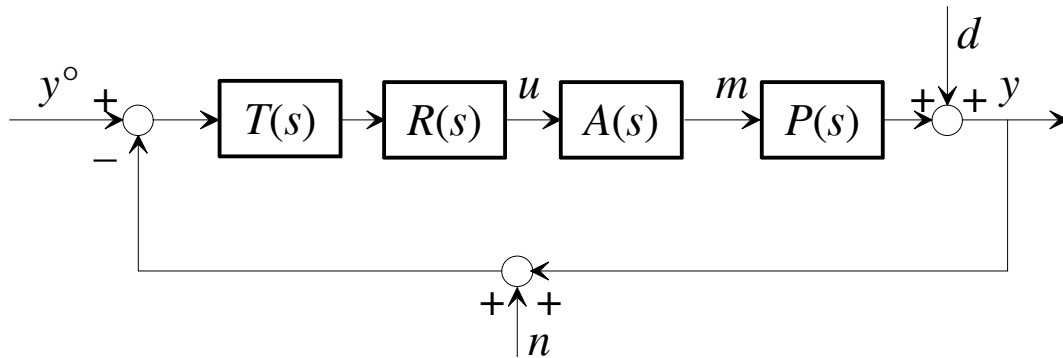


Fig. 3 : Prima elaborazione del sistema di controllo

A questo punto, sfruttando la commutatività del prodotto tra funzioni di trasferimento, si può ulteriormente semplificare lo schema a blocchi:

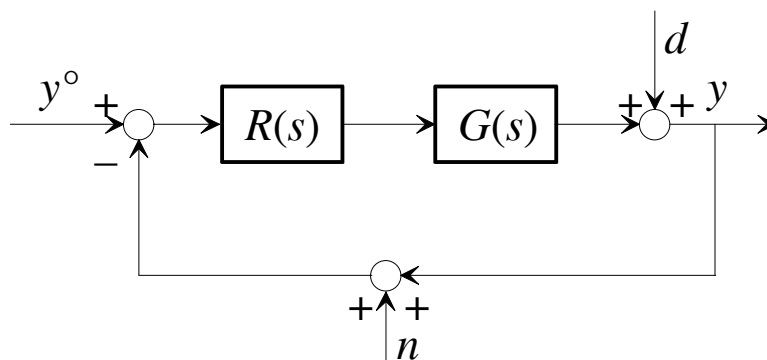


Fig. 4 : Seconda elaborazione del sistema di controllo

con:

$$G(s) = T(s) P(s) A(s).$$

Infine, una terza elaborazione porta al seguente schema:



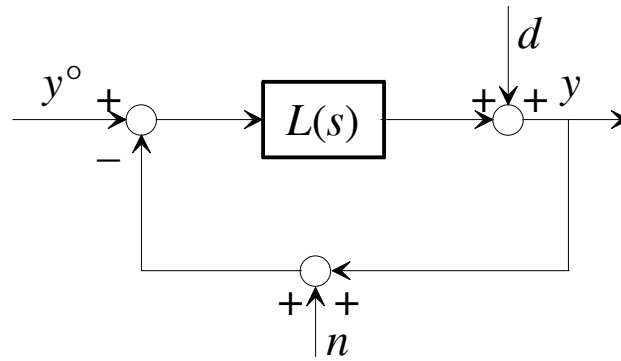


Fig. 5 : Terza elaborazione del sistema di controllo

dove:

$$L(s) = R(s) G(s).$$

Si osservi che  $L(s)$  è la **funzione di trasferimento d'anello** del sistema.

L'obiettivo ideale  $y \equiv y^o$  non è realizzabile, a causa dei limiti connessi alla dinamica del sistema sotto controllo, dell'attuatore e del trasduttore. Si definiscono allora una serie di **requisiti** che il progetto del controllore dovrà soddisfare:

- Stabilità:** Il sistema in anello chiuso deve essere asintoticamente stabile, altrimenti qualsiasi perturbazione agente in qualsiasi punto dell'anello si amplificherebbe indefinitamente.
- Precisione statica:** A regime, a seguito di assegnate perturbazioni (a scalino, a rampa ecc.) degli ingressi, l'errore tra riferimento e variabile controllata deve essere nullo, oppure inferiore ad una soglia prefissata.
- Precisione dinamica:** La variabile controllata deve inseguire le variazioni del riferimento, e reagire a perturbazioni sui disturbi, con sufficiente rapidità, e senza manifestare comportamenti oscillatori.
- Intensità dell'azione di controllo:** A causa dei limiti di funzionamento lineare degli attuatori, oltre che per non danneggiare gli attuatori stessi, occorre evitare che la variabile di controllo subisca brusche variazioni o assuma valori eccessivi.

# *Lezione 8*

## Stabilità dei sistemi di controllo

## Poli di un sistema di controllo

Riprendiamo lo schema a blocchi di un sistema di controllo in retroazione:

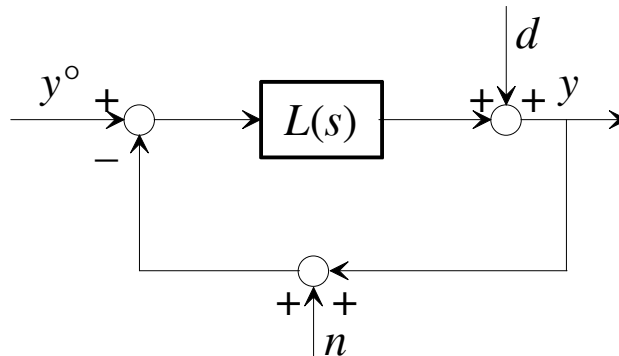


Fig. 1 : Sistema di controllo

Essendo la stabilità una proprietà del sistema, indipendente dagli ingressi, possiamo considerare il sistema di controllo privo dei disturbi:

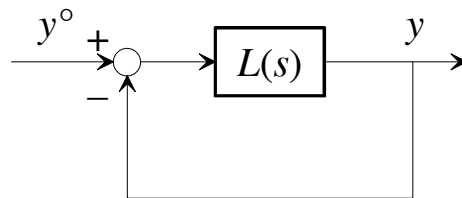


Fig. 2 : Sistema di controllo privo di disturbi

Espressa la funzione di trasferimento d'anello come rapporto di polinomi:

$$L(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

la funzione di trasferimento da  $y^\circ$  a  $y$  assume l'espressione:

$$\frac{c(s)}{c^\circ(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{\frac{N(s)}{D(s)}}{1 + \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{N(s)}{N(s) + D(s)}.$$

Definiamo il denominatore di questa funzione di trasferimento **polinomio caratteristico in anello chiuso**:

$$\chi(s) = N(s) + D(s).$$

Le radici di tale polinomio sono quindi i **poli** del sistema in anello chiuso.

**Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se tutte le radici del polinomio caratteristico hanno parte reale negativa.**

### **Esempio**

Sia

$$L(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} .$$

Poiché il polinomio caratteristico in anello chiuso:

$$\chi(s) = s^2 - s + 1 + s^3 + s^2 + s + 1 = s^3 + 2s^2 + 2$$

non soddisfa la condizione necessaria perché le sue radici abbiano tutte parte reale negativa, il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

---

Se nel formare il prodotto  $L(s)$  tra  $R(s)$  e  $G(s)$  intervengono cancellazioni tra poli (o zeri) di  $R(s)$  e zeri (o poli) di  $G(s)$ , i poli cancellati non compaiono più come radici del polinomio caratteristico. Ricordando tuttavia la discussione fatta nella Lezione 5 riguardo gli effetti delle cancellazioni tra poli e zeri sulla stabilità dei sistemi interconnessi, osserviamo che, se i poli cancellati non hanno parte reale negativa, il sistema nel suo complesso non può dirsi asintoticamente stabile, dal momento che nasce una instabilità (o, comunque, una non asintotica stabilità) interna.

Poiché zeri e poli della funzione di trasferimento  $G(s)$  sono da ritenersi assegnati, le considerazioni precedenti conducono alle seguenti **conclusioni**:

- a) Se il sistema sotto controllo  $G(s)$  ha un polo a parte reale positiva o nulla, tale polo non può essere cancellato da un corrispondente zero di  $R(s)$ .
- b) Se il sistema sotto controllo  $G(s)$  ha uno zero a parte reale positiva o nulla, tale zero non può essere cancellato da un corrispondente polo di  $R(s)$ .

## Il criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist è un criterio grafico di stabilità molto generale e di più immediata utilità del criterio del polinomio caratteristico ai fini della sintesi del controllore.

In questo corso ci si limiterà a dare l'enunciato del criterio, senza entrare in ulteriori approfondimenti.

Il criterio di Nyquist si basa sul tracciamento del cosiddetto **diagramma di Nyquist** associato alla funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$ : si tratta del diagramma polare della risposta in frequenza di  $L$ , orientato nel senso delle  $\omega$  crescenti, cui si aggiunge il simmetrico rispetto all'asse reale del piano complesso. Occorre poi introdurre due quantità:

$P_d$ : numero di poli a parte reale strettamente positiva di  $L(s)$

$N$ : numero di giri compiuti dal diagramma di Nyquist intorno al punto  $-1$  dell'asse reale, contati positivamente in senso antiorario. Se il diagramma passa per il punto  $-1$ ,  $N$  si dice non definito.

**Il criterio afferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se  $N$  è ben definito e risulta:**

$$N = P_d$$

### Esempio

Sia:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^2}.$$

Il diagramma polare si traccia sulla base dei diagrammi di Bode asintotici (il modulo parte da 10 e decresce monotonicamente, la fase parte da 0 e decresce monotonicamente fino a  $-180^\circ$ ). Dal diagramma polare è immediato tracciare il diagramma di Nyquist:

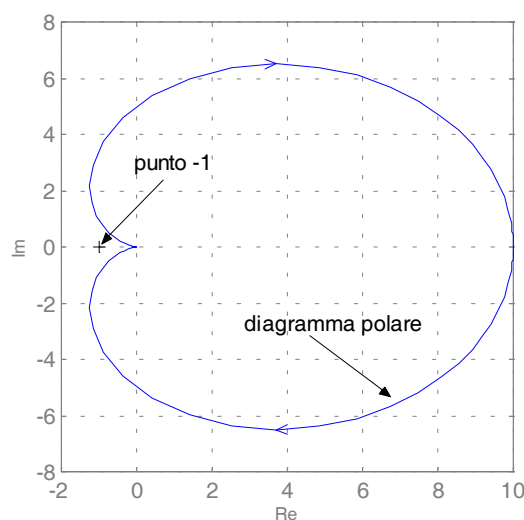


Fig. 3 : Diagramma di Nyquist di  $L$

Si osservi che  $P_d=0$ , e che il diagramma di Nyquist non compie giri intorno al punto  $-1$ , per cui  $N=0$ . Poiché  $N=P_d$  il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Per verifica, osserviamo che il polinomio caratteristico in anello chiuso è il seguente:

$$\chi(s) = 10 + (1+s)^2 = s^2 + 2s + 11,$$

ed ha entrambe le radici:

$$s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{10}$$

nel semipiano sinistro.

Se invece:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3},$$

il diagramma di Nyquist qualitativo si può tracciare di nuovo facilmente (si osservi che ora la fase della risposta in frequenza termina con il valore  $-270^\circ$ ).

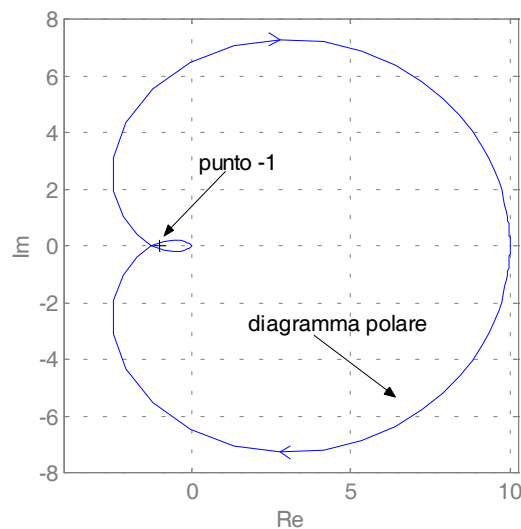


Fig. 4 : Diagramma di Nyquist di  $L$

Anche in questo caso  $P_d=0$ , mentre per determinare il valore di  $N$  occorre stabilire dove si trova il punto  $P$  in cui il diagramma attraversa l'asse reale. Tale punto può essere caratterizzato come quello in cui la parte immaginaria della risposta in frequenza si annulla o come quello in cui la fase della risposta in frequenza vale  $-180^\circ$ . Seguendo quest'ultima strada, e denominando  $\omega_p$  la pulsazione cui è associato il punto  $P$ , ricaviamo  $\omega_p$  dall'equazione:

$$\angle L(j\omega_p) = -180^\circ \Rightarrow -3\angle(1+j\omega_p) = -180^\circ \Rightarrow \arctan(\omega_p) = 60^\circ \Rightarrow \omega_p = \sqrt{3}.$$

Poiché:

$$\left|L(j\omega_p)\right| = \frac{10}{|1+j\omega_p|^3} = \frac{10}{\left(\sqrt{1+\omega_p^2}\right)^3} = \frac{10}{8} > 1,$$

il punto  $P$  si trova a sinistra del punto  $-1$ , attorno al quale il diagramma compie quindi due giri in senso orario. Pertanto  $N = -2 \neq P_d$  ed il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

Per verifica, osserviamo che il polinomio caratteristico in anello chiuso è il seguente:

$$\chi(s) = 10 + (1+s)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 11,$$

ed ha due radici:

$$s_{1,2} = 0.07 \pm j1.86, \quad s_3 = -3.15$$

nel semipiano destro.

## Il criterio di Bode

Si consideri nuovamente il sistema in anello chiuso di Fig. 2.

Introduciamo le seguenti *ipotesi* sulla funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$ :

1.  $L(s)$  non ha poli a parte reale positiva.
2. Il diagramma di Bode del modulo di  $L(j\omega)$  interseca l'asse a 0 dB una e una sola volta.

Diamo le seguenti *definizioni*:

**Pulsazione critica**  $\omega_c$  : pulsazione alla quale il diagramma di  $|L(j\omega)|_{dB}$  taglia l'asse a 0 dB, ossia:  $|L(j\omega_c)|=1$ ;

**Fase critica**  $\phi_c$  : fase di  $L(j\omega)$  in corrispondenza della pulsazione critica, ossia  $\phi_c = \angle L(j\omega_c)$ ;

**Margine di fase**  $\phi_m$  : differenza tra  $180^\circ$  e la fase critica, presa in modulo, ossia:  $\phi_m = 180^\circ - |\phi_c|$ ;

**Guadagno d'anello**  $\mu_L$  : guadagno (generalizzato) di  $L(s)$ .

Il **criterio di Bode** afferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile **se e solo se** il guadagno d'anello ed il margine di fase sono entrambi positivi:

$$\begin{cases} \mu_L > 0 \\ \phi_m > 0 \end{cases}$$

### *Esempio*

Sia:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^2} .$$

Il diagramma di Bode asintotico del modulo di  $L$  è riportato in figura:



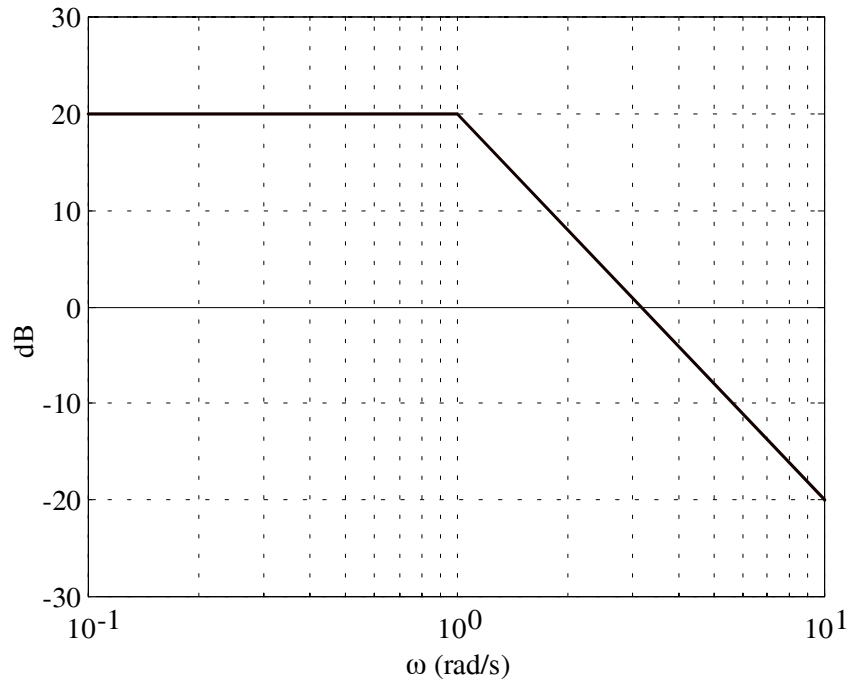


Fig. 5 : Diagramma di Bode asintotico di  $|L|$

La pulsazione critica vale  $\omega_c \approx 3$  rad / s. La fase critica può essere calcolata analiticamente o con il regolo delle fasi. Risulta:

$$\phi_c = -2 \arctan(3) = -2 \times 72^\circ = -144^\circ.$$

Il margine di fase è quindi:

$$\phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = 36^\circ > 0.$$

Poiché anche il guadagno d'anello (pari a 10) è positivo, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, coerentemente con quanto determinato con il criterio di Nyquist.

Se invece:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)^3},$$

il diagramma asintotico del modulo di  $L$  è il seguente:

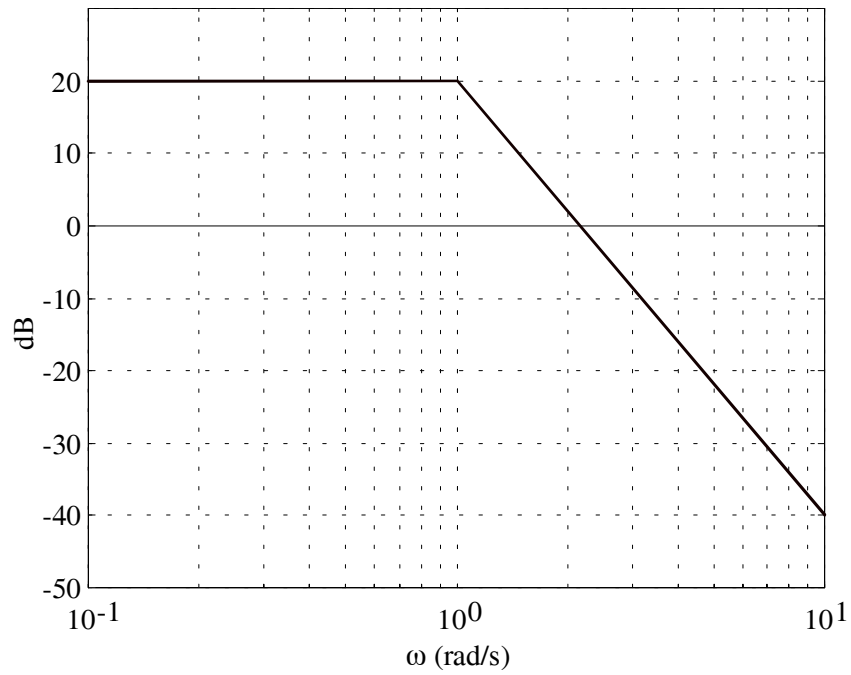


Fig. 6 : Diagramma di Bode di  $|L|$

La pulsazione critica vale  $\omega_c \approx 2$  rad / s. La fase critica:

$$\phi_c = -3 \arctan(2) = -3 \times 64^\circ = -192^\circ.$$

Il margine di fase è quindi:

$$\phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = -12^\circ < 0.$$

Pertanto il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile, coerentemente con quanto determinato con il criterio di Nyquist

## Osservazioni sul criterio di Bode

### 1) Giustificazione

Il criterio di Bode è un caso particolare del criterio di Nyquist: non è infatti difficile verificare che nelle condizioni di applicabilità del criterio di Bode (che corrispondono a  $P_d = 0$ ), le condizioni sul guadagno d'anello e sul margine di fase espresse dal criterio equivalgono a garantire l'assenza di giri del diagramma di Nyquist intorno al punto  $-1$  ( $N = 0$ ).

Rispetto al criterio di Nyquist, il criterio di Bode ha il vantaggio di richiedere il tracciamento dei diagrammi di Bode, di norma più agevole del tracciamento del diagramma di Nyquist.

---

### 2) Uso dei diagrammi asintotici

La pulsazione critica può essere stimata con buona precisione utilizzando il diagramma di Bode asintotico del modulo, a patto che non vi siano cambiamenti di pendenza nelle vicinanze della pulsazione critica stessa. Occorre quindi tenere presente che più vicini alla pulsazione critica sono i cambiamenti di pendenza, più inaccurata sarà la stima della pulsazione critica.

Inoltre gli eventuali poli o zeri complessi e coniugati devono essere ad alto smorzamento, altrimenti i diagrammi asintotici possono scostarsi sensibilmente da quelli reali.

---

### 3) Sistemi a fase minima

Un sistema dinamico si dice a **fase minima** se ha guadagno positivo e tutte le singolarità (poli e zeri) sono nel semipiano sinistro chiuso del piano complesso. Tale dizione deriva dal fatto che, se si tracciano i diagrammi di Bode della fase di tutte le funzioni di trasferimento a guadagno positivo e con poli nel semipiano sinistro chiuso, aventi lo stesso diagramma del modulo della funzione di trasferimento a fase minima, in quella a fase minima la fase si trova, per ciascuna pulsazione, ad un valore di ordinata superiore (e quindi, se le fasi come spesso avviene sono negative, la fase è più piccola in modulo).

Per un sistema a fase minima, ad ogni polo corrisponde un decremento unitario della pendenza del diagramma del modulo ed un decremento di  $90^\circ$  del valore della fase, e viceversa per gli zeri. Ne consegue che il diagramma asintotico della fase si può immediatamente ottenere da quello del modulo, semplicemente moltiplicandone in ogni tratto la pendenza per  $90^\circ$ .

Se allora il diagramma asintotico del modulo, in corrispondenza al **taglio** dell'asse a 0 dB ha **pendenza  $-1$** , e non vi sono cambiamenti di pendenza nelle immediate vicinanze della pulsazione critica, allora la fase critica sarà prossima al valore asintotico ( $-90^\circ$ ). Ne consegue che il sistema in anello chiuso, essendo il margine di fase ampiamente positivo, sarà asintoticamente stabile.

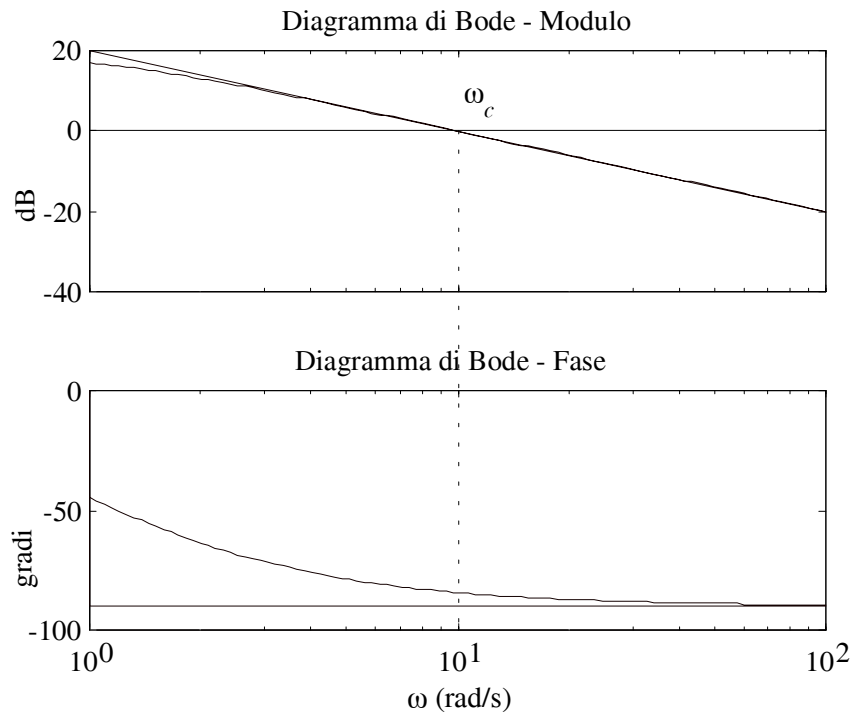


Fig. 7 : Taglio dell'asse a 0 dB con pendenza  $-1$  per un sistema a fase minima

#### 4) Sistemi con ritardo

Un sistema in cui ad ogni istante l'uscita ha il valore assunto dall'ingresso  $\tau$  istanti prima:

$$y(t) = u(t - \tau) ,$$

prende il nome di **ritardo** (si ricordi l'esempio del nastro trasportatore nella Lezione 2).

Trasformando secondo Laplace entrambi i membri dell'equazione si ha:

$$Y(s) = e^{-s\tau}U(s) ,$$

per cui la **funzione di trasferimento** del ritardo è la seguente:

$$G(s) = e^{-s\tau} .$$

La **risposta in frequenza** associata a questa funzione di trasferimento è quindi:

$$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau) .$$

Poiché risulta:

$$|G(j\omega)| = |e^{-j\omega\tau}| = \sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = 1 ,$$

$$\angle G(j\omega) = \angle e^{-j\omega\tau} = \arctan(-\sin(\omega\tau)/\cos(\omega\tau)) = -\omega\tau ,$$

il diagramma di Bode del modulo coincide con l'asse a 0 dB, mentre la fase decresce linearmente con  $\omega$  (sulla scala logaritmica si ha una curva monotona decrescente).

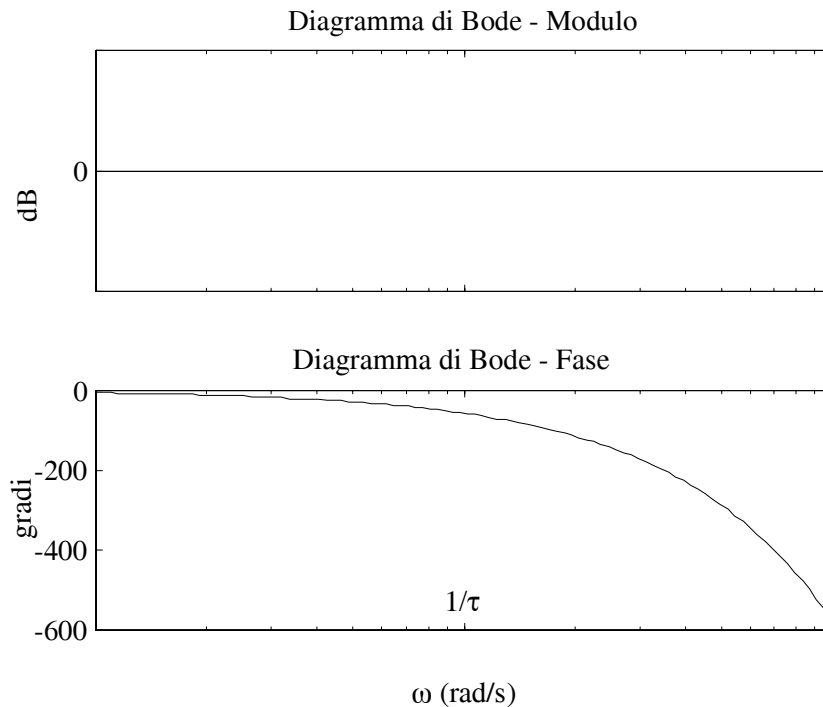


Fig. 8 : Diagrammi di Bode del ritardo

E' poi molto comune il caso in cui la funzione di trasferimento d'anello sia il prodotto di una funzione di trasferimento razionale  $L_r(s)$  e della funzione di trasferimento del ritardo:

$$L(s) = L_r(s)e^{-s\tau} .$$

Si dimostra che, se il criterio di Bode è applicabile per la funzione di trasferimento  $L_r(s)$  (cioè se tale funzione di trasferimento ne rispetta le ipotesi), allora rimane applicabile anche per la funzione di trasferimento  $L(s)$ .

Osservando poi che risulta:

$$|L(j\omega)| = |L_r(j\omega)e^{-j\omega\tau}| = |L_r(j\omega)| |e^{-j\omega\tau}| = |L_r(j\omega)| ,$$

$$\angle L(j\omega) = \angle(L_r(j\omega)e^{-j\omega\tau}) = \angle L_r(j\omega) + \angle e^{-j\omega\tau} = \angle L_r(j\omega) - \omega\tau ,$$

si conclude che la presenza del ritardo non altera il diagramma di Bode del modulo, per cui la pulsazione critica si può ricavare direttamente dall'analisi della funzione di trasferimento priva di ritardo. Per quanto riguarda la fase critica, al termine dovuto alla parte razionale della funzione di trasferimento occorrerà sommare un termine pari a:

$$-\omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} .$$

Si osservi la conversione da radianti a gradi, necessaria per rendere questo termine sommabile alle fasi espresse in gradi.

### Esempio

Sia:

$$L(s) = \frac{10}{(1+s)(1+10s)} e^{-s\tau}, \quad \tau > 0.$$

Il diagramma di Bode del modulo è riportato in figura.

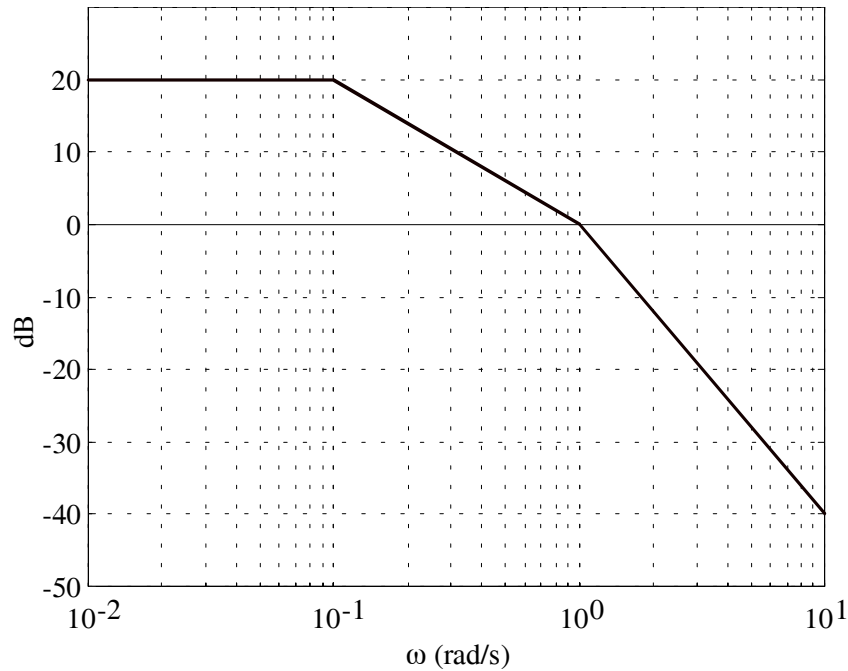


Fig. 9 : Diagramma di Bode asintotico del modulo di  $L$

La pulsazione critica vale approssimativamente  $\omega_c = 1$  rad/s.

La fase critica risulta:

$$\varphi_c \approx -\arctan\left(\frac{1}{0.1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{1}\right) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} \approx -84^\circ - 45^\circ - 57^\circ \tau = -129^\circ - 57^\circ \tau .$$

Il margine di fase vale quindi:

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - |-129^\circ - 57^\circ \tau| = 180^\circ - (129^\circ + 57^\circ \tau) = 51^\circ - 57^\circ \tau .$$

Pertanto se, per esempio,  $\tau = 0.1$ , il margine di fase è positivo ed il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile; se  $\tau = 2$ , il margine di fase è negativo ed il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

## Margine di guadagno

Il margine di fase, oltre a dare un'indicazione binaria sull'asintotica stabilità del sistema in anello chiuso, quantifica anche la **robustezza della stabilità**, ossia il margine di sicurezza con cui possiamo tollerare incertezze sul modello senza compromettere l'asintotica stabilità. Più alto è il margine di fase, più robusto è il sistema. Vi sono tuttavia casi in cui il margine di fase non costituisce un indicatore attendibile, come riportato nell'esempio in figura:

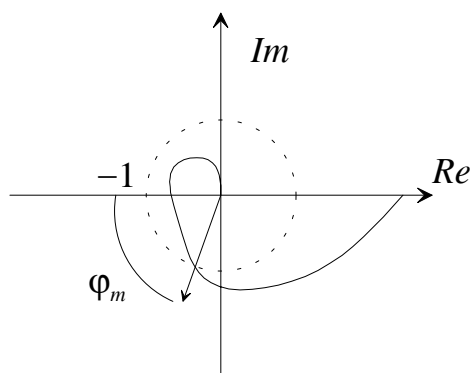


Fig. 10 : Diagramma polare di  $L$  ad alto margine di fase ma bassa robustezza

Pur essendo il margine di fase elevato, il diagramma polare passa molto vicino al punto  $-1$ , rendendo il sistema scarsamente robusto a fronte di incertezze di modello.

Un indicatore da usare in congiunzione con il margine di fase è il margine di guadagno. Sempre nell'ipotesi  $P_d=0$ , si supponga che il diagramma polare di  $L$  attraversi il semiasse reale negativo in uno e un solo punto:

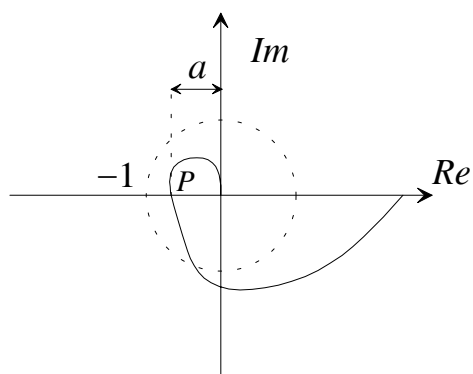


Fig. 11 : Diagramma polare di  $L$  con indicazione della distanza del punto  $P$  dall'origine

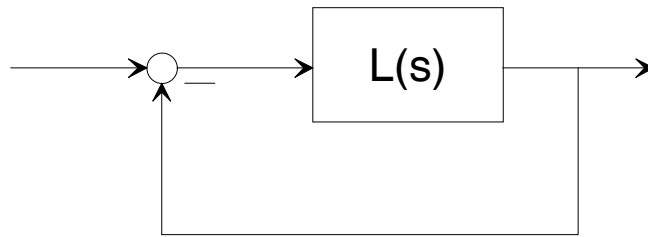
Un indice di robustezza è la distanza del punto  $P$  di intersezione dal punto  $-1$ , ovvero la vicinanza del punto  $P$  all'origine. Detta allora  $a$  la distanza del punto dall'origine, definiamo **margine di guadagno** la quantità:

$$k_m = \frac{1}{a} = \frac{1}{|L(j\omega_p)|}, \quad \text{con } \angle L(j\omega_p) = -180^\circ.$$

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se  $k_m > 1$ , ed è tanto più robusto quanto maggiore è  $k_m$ .

## Esercizi

### Esercizio 8.1



Con riferimento al sistema retroazionato di figura, si dica per quali delle seguenti espressioni della funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$  è applicabile il criterio di Bode per l'analisi di stabilità del sistema in anello chiuso:

$$L_1(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)}$$

$$L_2(s) = \frac{10}{(1-s)(1+0.1s)}$$

$$L_3(s) = \frac{0.1}{(1+s)(1+0.1s)}$$

$$L_4(s) = 0.5 \frac{(1+s)}{(1+0.1s)^2}$$

$$L_5(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.1s)} e^{-0.1s}$$

$$L_6(s) = 10 \frac{(1-s)}{(1-s^2)}$$

### Esercizio 8.2

Si valuti il margine di fase per i sistemi dell'esercizio 8.1 per i quali sia applicabile il criterio di Bode.

### Esercizio 8.3

Si discuta la stabilità in anello chiuso per i sistemi dell'esercizio 8.1 per i quali non sia applicabile il criterio di Bode.

### Esercizio 8.4

Con riferimento ad un sistema retroazionato in cui  $L(s)$  è la funzione di trasferimento di un sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 2x_2(t) + u(t-1)$$

$$y(t) = 10x_1(t)$$

si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso.

### Esercizio 8.5

Si discuta la stabilità del sistema in anello chiuso quando la funzione di trasferimento  $L(s)$  assume una delle seguenti espressioni:

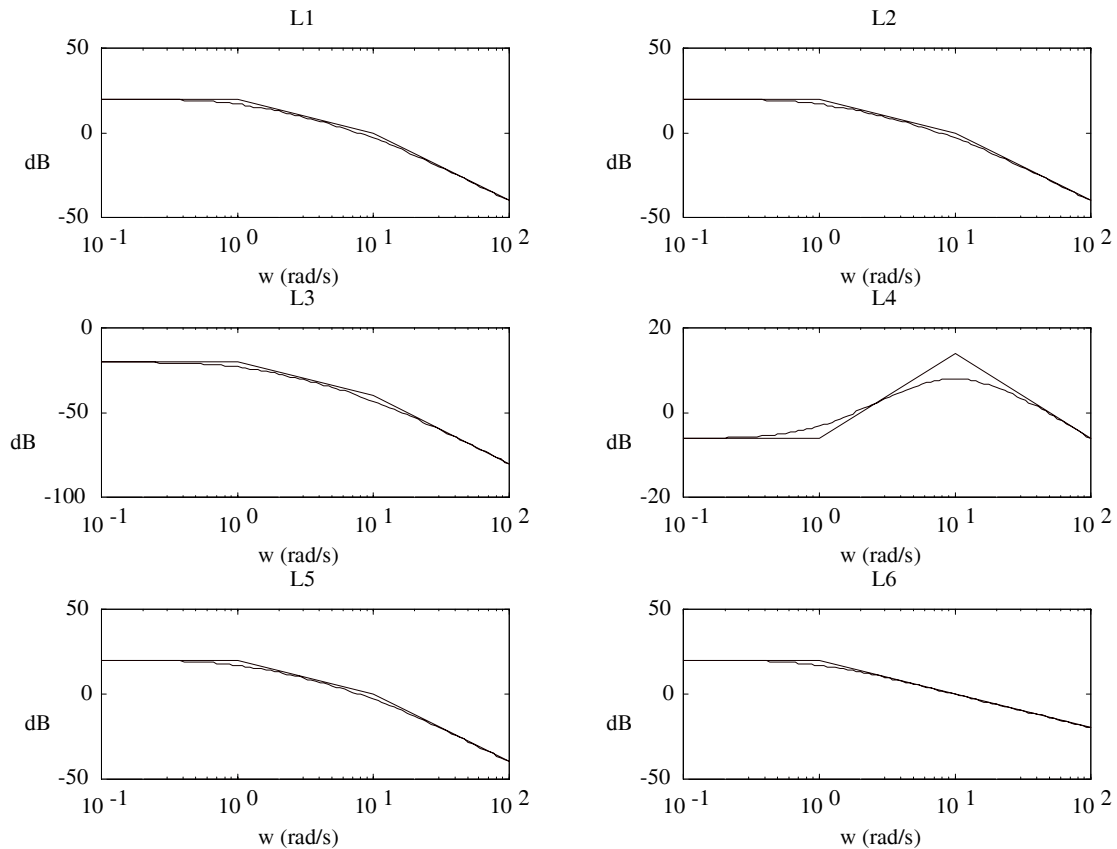
$$L_1(s) = -\frac{10}{(1+s)^2} \quad L_2(s) = \frac{10}{1-s^2} \quad L_3(s) = \frac{10}{(1+s)^2} \quad L_4(s) = \frac{10}{(1-s)^2}$$



## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 8.1

I diagrammi di Bode del modulo per le 6 funzioni di trasferimento d'anello sono riportati in figura:



$L_1$ : il criterio di Bode è applicabile

$L_2$ : il criterio di Bode non è applicabile (c'è un polo nel semipiano destro)

$L_3$ : il criterio di Bode non è applicabile (il diagramma non taglia l'asse a 0 dB)

$L_4$ : il criterio di Bode non è applicabile (il diagramma taglia due volte l'asse a 0 dB)

$L_5$ : il criterio di Bode è applicabile

$L_6$ : il criterio di Bode non è applicabile (c'è un polo nel semipiano destro)

### Esercizio 8.2

$$L_1: \omega_c \approx 10, \quad \phi_c = -84^\circ - 45^\circ = -129^\circ, \quad \phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = 51^\circ.$$

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

$$L_5: \omega_c \approx 10, \quad \phi_c = -84^\circ - 45^\circ - 10 \times 0.1 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -129^\circ - 57^\circ = -186^\circ, \quad \phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = -6^\circ$$

Il sistema in anello chiuso è instabile.

### **Esercizio 8.3**

$L_2$ : il polinomio caratteristico in anello chiuso vale:

$$\chi(s) = 10 + (1-s)(1+0.1s) = -0.1s^2 - 0.9s + 11$$

ed ha radici nel semipiano destro. Pertanto il sistema in anello chiuso è instabile.

$L_3$ : il polinomio caratteristico in anello chiuso vale:

$$\chi(s) = 0.1 + (1+s)(1+0.1s) = 0.1s^2 + 1.1s + 1.1$$

ed ha tutte le radici nel semipiano sinistro. Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

$L_4$ : il polinomio caratteristico in anello chiuso vale:

$$\chi(s) = 0.5(1+s) + (1+0.1s)^2 = 0.01s^2 + 0.7s + 1.5$$

ed ha tutte le radici nel semipiano sinistro. Pertanto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

$L_6$ : la funzione di trasferimento d'anello presenta un polo nel semipiano destro cancellato da uno zero. Pertanto sia il sistema in anello aperto che quello in anello chiuso sono instabili.

### **Esercizio 8.4**

Trasformando secondo Laplace le equazioni del sistema si ottiene:

$$sX_1(s) = X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -X_1(s) - 2X_2(s) + e^{-s}U(s)$$

$$Y(s) = 10X_1(s)$$

da cui:

$$L(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = 10 \frac{e^{-s}}{(1+s)^2} .$$

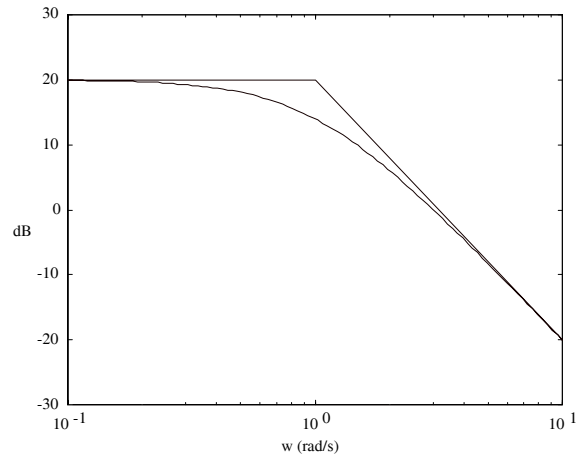
Tracciato il diagramma di Bode del modulo di  $L$  (si veda la figura relativa all'esercizio 8.5) si ricava:

$$\omega_c \approx 3, \quad \phi_c = -2 \times 72^\circ - 3 \times 1 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -144^\circ - 172^\circ = -316^\circ, \quad \phi_m = 180^\circ - |\phi_c| = -136^\circ$$

Il sistema in anello chiuso è quindi instabile.

### **Esercizio 8.5**

Tutte e quattro le funzioni di trasferimento hanno lo stesso diagramma di Bode del modulo, uguale a quello riportato di seguito:



$L_1$ : il sistema in anello chiuso è instabile (dal criterio di Bode, essendo il guadagno d'anello negativo)

$L_2$ : il sistema in anello chiuso è instabile (il criterio di Bode non è applicabile, ma si può studiare il polinomio caratteristico in anello chiuso)

$L_3$ : il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (dal criterio di Bode, essendo il margine di fase positivo)

$L_4$ : il sistema in anello chiuso è instabile (il criterio di Bode non è applicabile, ma si può studiare il polinomio caratteristico in anello chiuso).

## *Lezione 9*

# Prestazioni dinamiche dei sistemi di controllo

## Caratterizzazione delle prestazioni dinamiche

Le prestazioni dinamiche fanno riferimento al comportamento del sistema di controllo durante i transitori, ossia alla modalità con cui le variabili del sistema, ed in particolare la variabile controllata, passano da una condizione di regime ad una nuova, a seguito di variazioni degli ingressi.

Sono di particolare importanza, a questo riguardo:

- la **velocità di risposta**, ovvero la rapidità con cui la variabile controllata segue brusche variazioni (per esempio a scalino) del riferimento;
- lo **smorzamento dei transitori**, ovvero l'assenza o l'irrilevanza di oscillazioni nel transitorio.

Con riferimento ai parametri con cui si era caratterizzata la risposta allo scalino di un sistema dinamico, potremo dire che la velocità di risposta corrisponde ad avere un tempo di salita della risposta allo scalino ridotto mentre lo smorzamento dei transitori corrisponde a sovraelongazione massima e tempo di assestamento contenuti.

Rientrano inoltre nel novero delle prestazioni dinamiche anche la reiezione dei disturbi, siano essi sulla linea di andata o su quella di retroazione, e la moderazione del controllo, ossia la proprietà del sistema di controllo per cui la variabile di controllo non è sottoposta ad eccessive sollecitazioni.

## Banda passante

Si consideri un sistema a costante di tempo:

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT}, \quad T > 0.$$

E' noto che la risposta allo scalino di questo sistema è tanto più rapida quanto più piccola è la costante di tempo  $T$ . Detta  $\omega_H = 1/T$  la pulsazione del polo, possiamo equivalentemente dire che la risposta è tanto più veloce quanto più in alta frequenza è la pulsazione del polo.

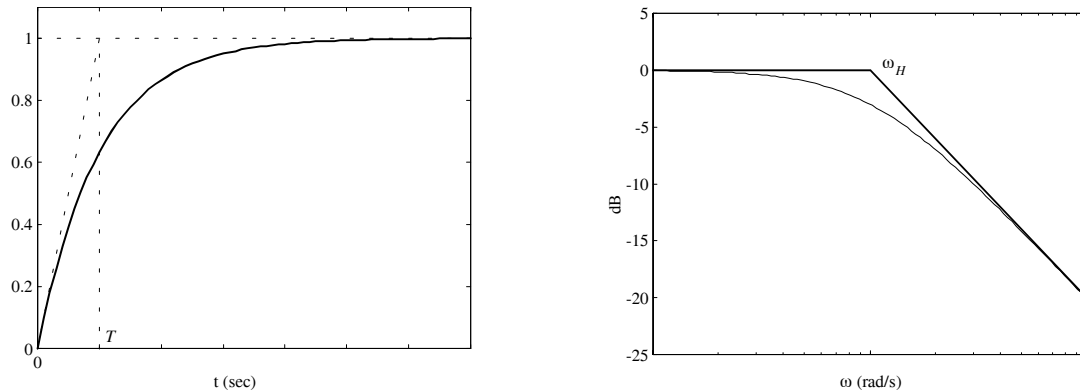


Fig. 1 : Risposta allo scalino e diagramma di Bode del modulo

Pertanto la pulsazione del polo è un buon indice della velocità di risposta del sistema.

Si consideri ora un sistema di controllo in anello chiuso, ed in particolare la funzione di trasferimento dal riferimento  $y^o$  alla variabile controllata  $y$ :

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = F(s).$$

In virtù dell'imposizione dei requisiti statici,  $F(s)$  varrà 1, o comunque un valore prossimo a 1, in bassa frequenza (cioè per  $s \rightarrow 0$ ). Inoltre il sistema di controllo sarà progettato in modo tale che la sua funzione di trasferimento rifletta la caratteristica, propria dei sistemi fisici, di avere più poli che zeri. Da queste considerazioni seguono le due caratteristiche fondamentali del diagramma di Bode del modulo di  $F$ :

- per  $\omega \rightarrow 0$ ,  $|F(j\omega)|_{dB} \approx 0$ ;
- per  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $|F(j\omega)|_{dB} \rightarrow -\infty$ .

Andamenti plausibili del modulo di  $F$  potranno pertanto essere quelli riportati in figura:

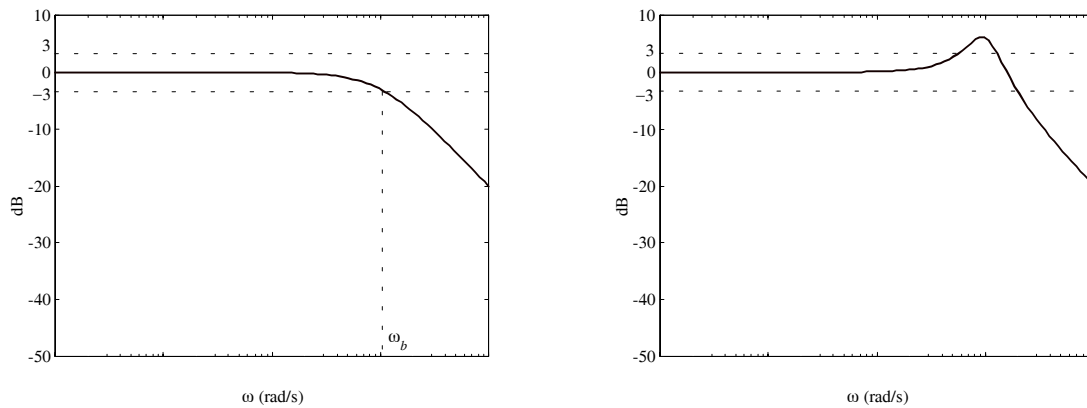


Fig. 2 : Tipici andamenti del diagramma di Bode del modulo di  $F$

Se il diagramma di Bode del modulo di  $F$  non supera per nessuna pulsazione il valore 3 dB, si definisce **banda passante** del sistema di controllo l'insieme delle pulsazioni  $[0, \omega_b]$ , essendo  $\omega_b$  la pulsazione alla quale il modulo vale  $-3$  dB.

Si osservi che la condizione espressa preliminarmente alla definizione di banda passante esclude la presenza di rilevanti picchi o rigonfiamenti nel diagramma del modulo, e quindi le situazioni rappresentate dal diagramma di destra in Fig. 2. In altre parole il sistema di controllo si comporta da **filtro passabasso**.

Se la pendenza del diagramma di  $|F|_{dB}$  dopo la pulsazione  $\omega_b$  vale  $-1$ , il sistema di controllo si comporta in prima approssimazione come un **sistema del primo ordine**, con pulsazione del polo pari a  $\omega_b$ . Ne consegue che i transitori del sistema in anello chiuso saranno caratterizzati da una costante di tempo approssimativamente pari a:

$$\tau = \frac{1}{\omega_b} .$$

Il sistema sarà quindi tanto più veloce quanto più estesa è la sua banda passante, ossia l'estremo superiore della banda passante è un buon indice della **velocità di risposta** del sistema di controllo.

## Velocità di risposta e pulsazione critica

Ci si pone ora l'obiettivo di individuare un indice di velocità di risposta legato alla funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$ , piuttosto che alla funzione di trasferimento in anello chiuso  $F(s)$ .

Ricordiamo che risulta:

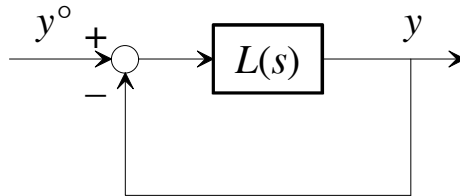


Fig. 3 : Sistema di controllo privo di disturbi

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$

Il legame tra le risposte in frequenza è quindi:

$$F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)},$$

ed in particolare:

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|}.$$

Consideriamo ora la seguente **approssimazione**:

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \forall \omega: |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & \forall \omega: |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}.$$

Tracciato il diagramma di  $|L|$ , l'approssimazione consiste nell'attribuire a  $|F|$  il valore 1 per quelle pulsazioni per cui  $|L|$  è decisamente sopra l'asse a 0 dB, o il valore di  $|L|$  quando  $|L|$  è decisamente sotto l'asse a 0 dB.

Poniamoci ora nelle ipotesi di **applicabilità del criterio di Bode**.

Considerando un tipico andamento di  $|L|$ , si avrà la situazione riportata in Fig. 4.



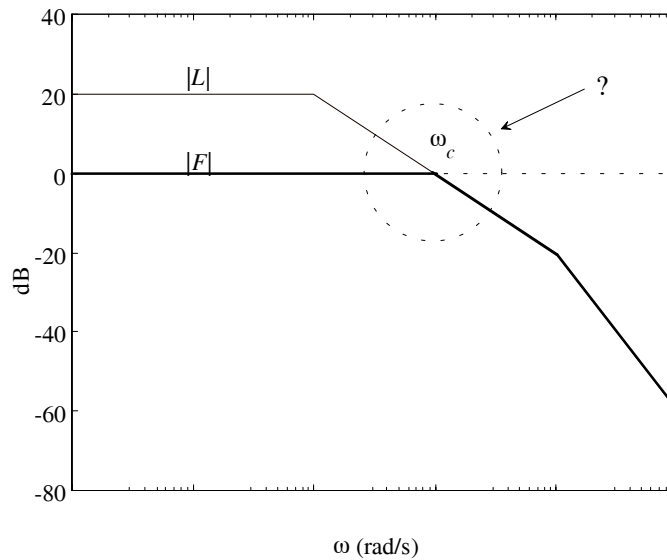


Fig. 4 : Metodo grafico per il tracciamento del diagramma asintotico del modulo di  $F$  a partire da quello di  $L$

L' approssimazione consiste allora nel porre:

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \forall \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & \forall \omega \gg \omega_c \end{cases} .$$

L' approssimazione è evidentemente migliore a pulsazioni lontane dalla pulsazione critica  $\omega_c$ .

Possiamo quindi concludere che  $F$  si comporta da filtro passabasso a guadagno unitario, ma non siamo ancora in grado di dire se presenta risonanza (ossia se il modulo di  $F$  presenta rigonfiamenti). Di conseguenza non è ancora chiaro se sia più opportuno approssimare  $F$  con un sistema del primo ordine o con uno del second'ordine a poli complessi.

## Smorzamento e margine di fase

Il calcolo esatto del modulo di  $F$  per  $\omega = \omega_c$  conduce al seguente risultato:

$$\begin{aligned} |F(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|1 + \cos \varphi_c + j \sin \varphi_c|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi_c + 2 \cos \varphi_c + \sin \varphi_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)}} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)}. \end{aligned}$$

In particolare, per  $\varphi_m = 90^\circ$ , risulta:

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |F(j\omega_c)|_{dB} = -3,$$

per cui  $\omega_c = \omega_b$ , ossia la **pulsazione critica** coincide con l'**estremo superiore della banda passante**.

Peraltro per valori inferiori a  $90^\circ$  del margine di fase, ma comunque elevati, il modulo di  $F$  in  $\omega_c$  rimane prossimo al valore precedentemente ottenuto: in particolare rimane inferiore a 1 per valori di  $\varphi_m$  superiori a  $60^\circ$ . Considerando che valori di margine di fase elevato sono di norma associati ad attraversamenti dell'asse delle pulsazioni con pendenza del modulo di  $L$  pari a  $-1$ , possiamo concludere che in questo caso ( $\varphi_m > 60^\circ$ ) è adeguata un'approssimazione di  $F$  con una funzione di trasferimento del primo ordine a **costante di tempo**, con costante di tempo pari all'inverso della pulsazione critica:

$$F(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_c}.$$

Il transitorio quindi si assesterà al 99% del valore di regime dopo un tempo pari a circa  $4.6/\omega_c$ .

Per valori inferiori del margine di fase ( $\varphi_m < 60^\circ$ ) appare più adeguata un'approssimazione del secondo ordine con **poli complessi coniugati** alla pulsazione  $\omega_c$ :

$$F(s) \approx \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\zeta\omega_c s + \omega_c^2}.$$

Lo smorzamento si può determinare confrontando il valore assunto in  $\omega_c$  dal modulo della risposta in frequenza dell'approssimante con il valore esatto determinato precedentemente:

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)},$$

da cui:

$$\zeta = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \approx \frac{\varphi_m}{100},$$

dove l'ultima approssimazione è valida se  $\varphi_m$  è espresso in gradi.

Il transitorio quindi si assesterà al 99% del valore di regime dopo un tempo pari a circa  $4.6/(\zeta\omega_c)$ .

Si osservi che il risultato trovato stabilisce un'importante relazione tra lo smorzamento dei transitori in anello chiuso ed il margine di fase, il quale, quindi, oltre a costituire un indice di robustezza della stabilità, qualifica anche il "grado di stabilità" del sistema.

### **Esempio**

Sia:

$$L(s) = \frac{100}{s(1+0.0025s)}.$$

Si vuole tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino della funzione di trasferimento  $F(s)$ .

Il diagramma di Bode di  $|L(j\omega)|$  è riportato in figura:

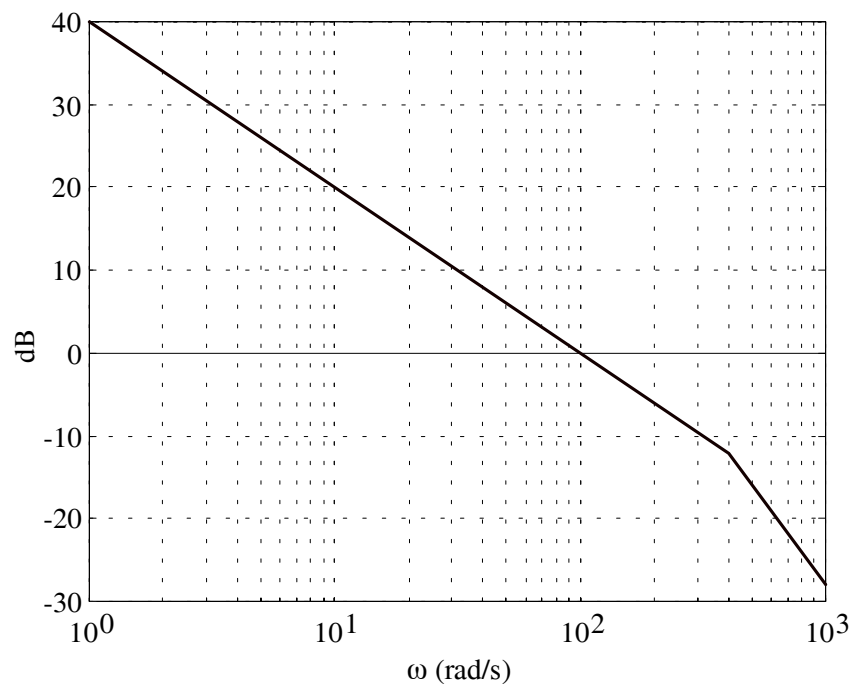


Fig. 5 : Diagramma di Bode asintotico di  $|L|$

La pulsazione critica è  $\omega_c = 100$  rad/s, mentre il margine di fase risulta:

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - \left| -90^\circ - \arctan\left(\frac{100}{400}\right) \right| = 180^\circ - |-90^\circ - 14^\circ| = 76^\circ.$$

E' quindi possibile procedere all'approssimazione:

$$F(s) \approx \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + 0.01s}.$$

La risposta allo scalino approssimata di  $F(s)$  è riportata in Fig. 6, dove viene confrontata con la risposta effettiva del sistema di controllo:

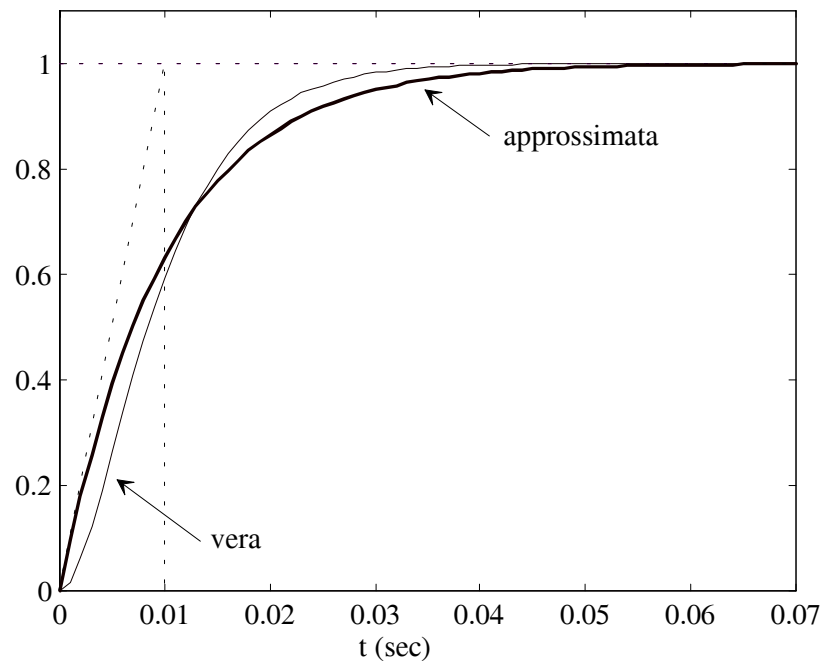


Fig. 6 : Risposta allo scalino di  $F$

## Reiezione dei disturbi

### *Disturbo in linea di andata*

Consideriamo un disturbo  $d$  in linea di andata:

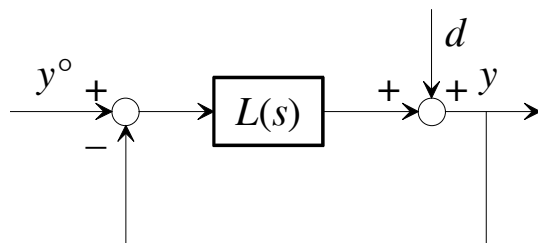


Fig. 7 : Sistema di controllo con disturbo in linea di andata

La funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  alla variabile controllata  $y$  è data da:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = S(s) = \frac{1}{1 + L(s)},$$

dove  $S$  prende il nome di **funzione di sensitività**.

Possiamo **approssimare** il modulo della risposta in frequenza come fatto prima:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \forall \omega: |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & \forall \omega: |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases},$$

e, nelle ipotesi di applicabilità del criterio di Bode,

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \forall \omega \ll \omega_c \\ 1 & \forall \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

Tracciato il diagramma di  $|L|$ , quello di  $1/|L|$  si ottiene per ribaltamento rispetto all'asse a 0 dB. L'approssimazione consiste nell'attribuire a  $|S|$  il valore 1 per quelle pulsazioni per cui  $|L|$  è decisamente sotto l'asse a 0 dB, o il valore di  $1/|L|$  quando  $|L|$  è decisamente sopra l'asse a 0 dB. Considerando un tipico andamento di  $|L|$ , si avrà la situazione riportata in figura (con le stesse considerazioni fatte prima circa la validità delle approssimazioni).

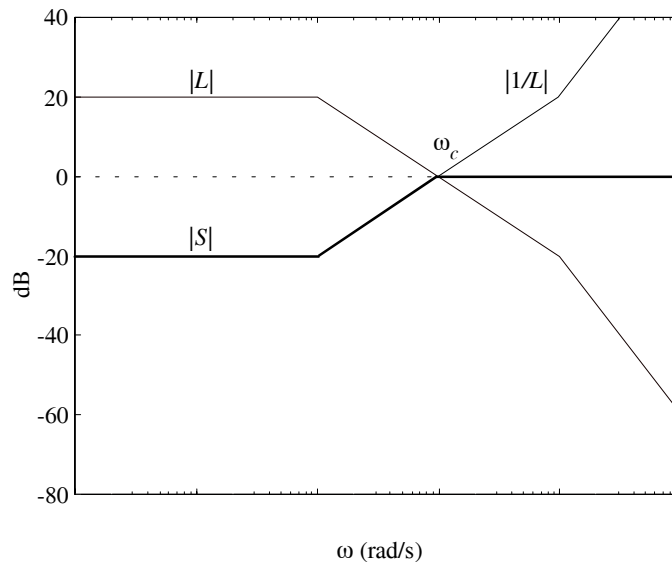


Fig. 8 : Costruzione grafica del diagramma asintotico di  $|S|$

Pertanto le componenti armoniche (sinusoidi) del disturbo a pulsazioni inferiori alla pulsazione critica, e quindi interne alla banda passante, sono fortemente attenuate sulla variabile controllata. L'attenuazione è tanto maggiore quanto più alto è il valore del modulo di  $L$  sulla banda passante.

Si conclude quindi che per un'efficace reiezione dei disturbi in linea di andata la **banda passante** deve essere **sufficientemente ampia** da contenere le armoniche significative del disturbo.

### *Disturbo in linea di retroazione*

Consideriamo un disturbo  $n$  in linea di retroazione:

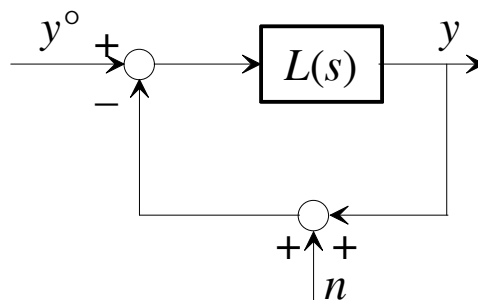


Fig. 9 : Sistema di controllo con disturbo in linea di retroazione

La funzione di trasferimento dal disturbo  $n$  alla variabile controllata  $y$  è data da:

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = -F(s) = -\frac{L(s)}{1 + L(s)},$$

La funzione di trasferimento  $F(s)$ , che prende il nome di **funzione di sensitività complementare**<sup>1</sup>, è la stessa esistente tra riferimento e variabile controllata. Sappiamo quindi già come ottenerne il modulo a partire da quello di  $L$  (si veda la Fig. 4).

Possiamo concludere quindi che tutte le componenti armoniche del disturbo esterne alla banda passante del sistema di controllo vengono attenuate, mentre quelle interne passano. Ne consegue che per un'efficace reiezione dei disturbi in linea di retroazione (che tipicamente si caratterizzano come rumore di alta frequenza), è bene che la **banda passante non sia eccessivamente ampia**.

---

<sup>1</sup> Si osservi che  $F(s) = 1 - S(s)$

## Moderazione del controllo

Consideriamo un sistema di controllo in cui mettiamo in evidenza la variabile di controllo:

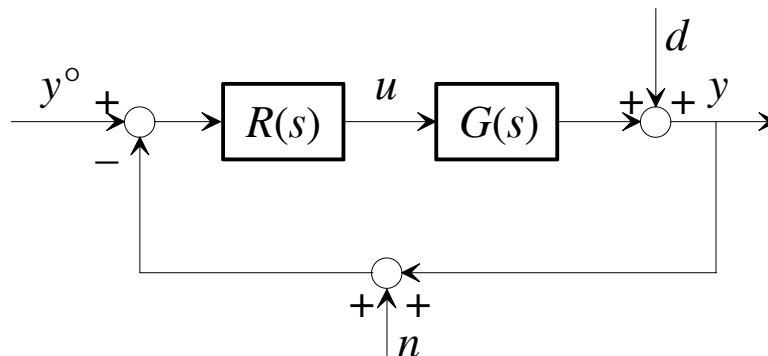


Fig. 10 : Sistema di controllo con in evidenza la variabile di controllo

La funzione di trasferimento dal riferimento  $y^o$  alla variabile di controllo  $u$  è data da:

$$\frac{U(s)}{Y^o(s)} = Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)},$$

dove  $Q$  prende il nome di **funzione di sensitività del controllo**.

Si osservi che, a meno del segno, questa è anche la funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  e dal disturbo  $n$  alla variabile di controllo. Poiché il riferimento e i due disturbi hanno caratteristiche armoniche differenti, è bene che la funzione di trasferimento attenui (o non amplifichi) su tutto l'asse delle pulsazioni.

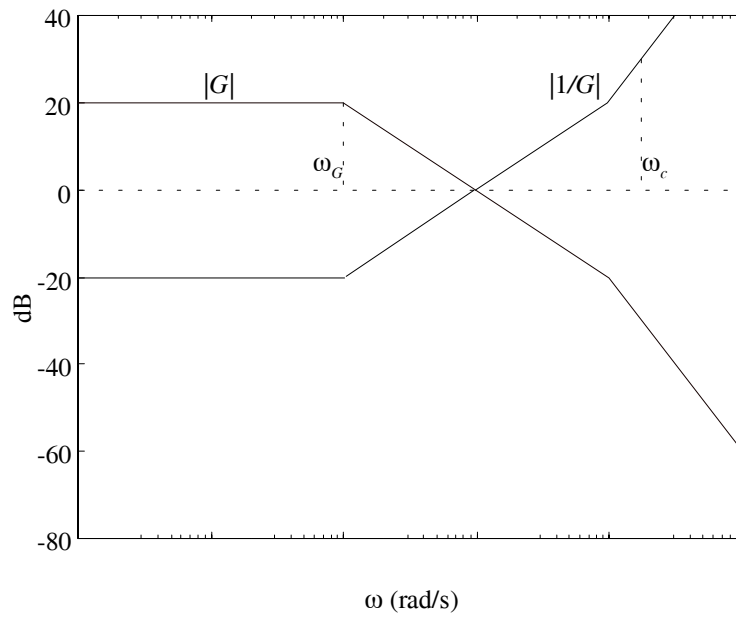
Possiamo approssimare il modulo della risposta in frequenza:

$$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \forall \omega: |L(j\omega)| \gg 1 \quad (\omega \ll \omega_c) \\ |R(j\omega)| & \forall \omega: |L(j\omega)| \ll 1 \quad (\omega \gg \omega_c) \end{cases}.$$

Poiché fuori dalla banda passante ( $\omega > \omega_c$ ) il modulo di  $Q$  coincide con quello di  $R$ , è bene che il **regolatore** sia progettato in modo che il suo **modulo non assuma valori eccessivi in alta frequenza**.

Per quanto riguarda invece il comportamento in banda passante, dobbiamo ipotizzare una tipologia di risposta in frequenza per  $G$ : ipotizziamo un comportamento di tipo filtro passabasso, con un certo guadagno maggiore di 1 e pulsazione di taglio pari a  $\omega_G$ . E' allora abbastanza evidente che se  $\omega_c$  è molto maggiore di  $\omega_G$ , il diagramma di  $1/|G|$ , cui  $|Q|$  coincide in banda, può assumere valori molto elevati.



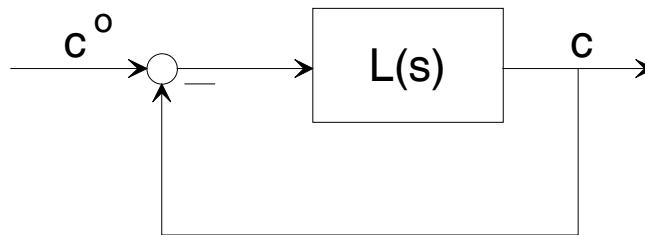


*Fig. 11 : Banda in anello aperto e in anello chiuso*

Concludiamo allora che per garantire moderazione al controllo la **banda passante non deve essere eccessivamente ampia rispetto alla banda che caratterizza la dinamica in anello aperto.**

## Esercizi

### Esercizio 9.1



Per il sistema di controllo di figura si tracci l'andamento qualitativo dell'uscita  $c$  quando:

$$L(s) = 10 \frac{1+10s}{(1+s)(1+0.1s)}$$

e:

$$c^o(t) = sca(t) .$$

### Esercizio 9.2

Con riferimento al sistema di controllo della figura precedente, si dica per quale delle seguenti scelte della funzione di trasferimento  $L(s)$  la risposta di  $c$  allo scalino in  $c^o$  ha tempo di risposta inferiore:

$$L_1(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}$$

$$L_2(s) = \frac{100}{1+10s}$$

### Esercizio 9.3

Si dica se il sistema di controllo della figura precedente in cui:

$$L(s) = \frac{10}{s(1+0.02s)}$$

è in grado di riprodurre correttamente in uscita il segnale di riferimento:

$$c^o(t) = a_1 \sin(t + \beta_1) + a_2 \sin(5t + \beta_2) + a_3 \sin(100t + \beta_3)$$

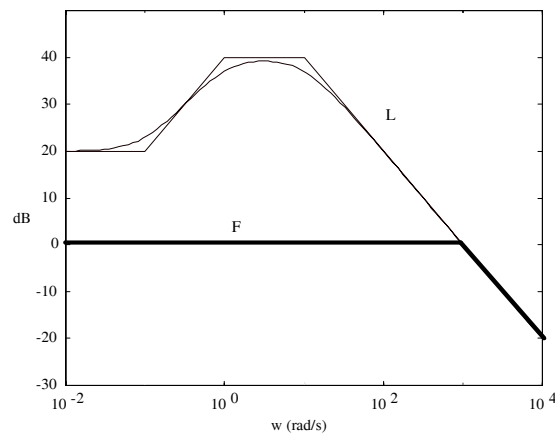
dove  $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  sono parametri arbitrari.

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 9.1

Dal diagramma di Bode del modulo di  $L$ , riportato di seguito, si deduce che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (criterio di Bode). Nella stessa figura è anche riportato il diagramma di Bode approssimato del modulo della funzione di trasferimento in anello chiuso dal riferimento alla variabile controllata:

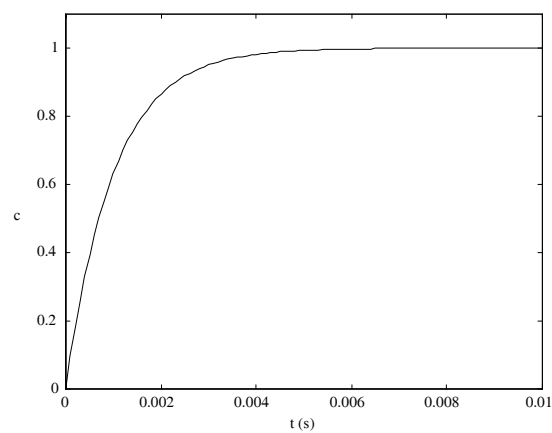
$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} .$$



Tale funzione di trasferimento può essere approssimata da una funzione di trasferimento del primo ordine a guadagno unitario e polo a pulsazione  $\omega_c$ :

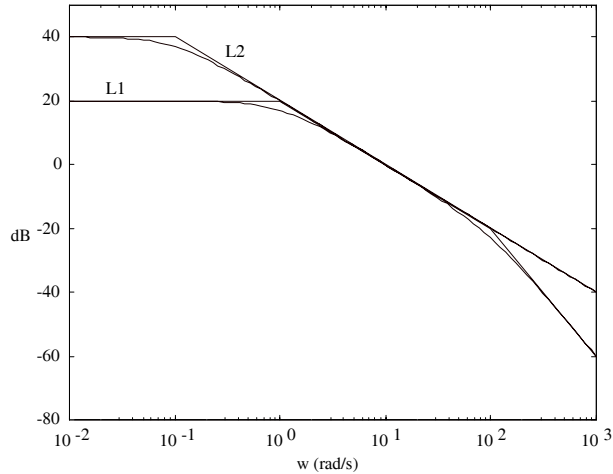
$$F(s) \approx \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} ,$$

per cui, essendo  $\omega_c$  uguale a  $1000 \text{ rad/s}$ , la risposta allo scalino approssimata ha l'andamento riportato in figura:



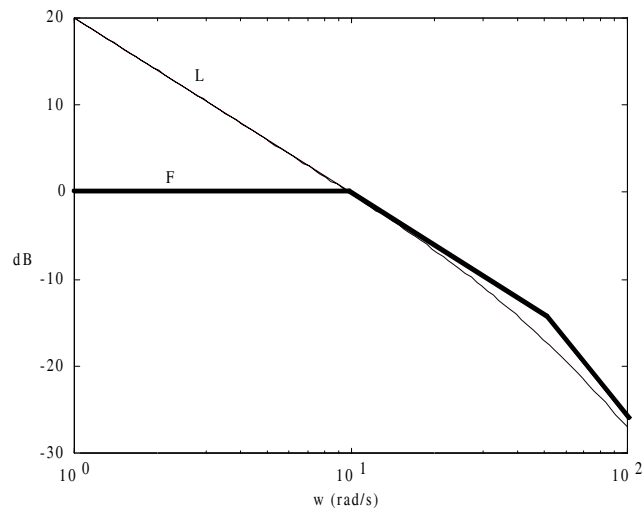
### Esercizio 9.2

I diagrammi di Bode del modulo di  $L_1$  e  $L_2$  sono riportati in figura. Da essi si deduce che in entrambi i casi il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, e che la pulsazione critica è la stessa in entrambi i casi. Si può quindi concludere che i due sistemi in anello chiuso avranno tempo di risposta sostanzialmente uguale.



### Esercizio 9.3

Il diagramma di Bode del modulo di  $L$  è riportato in figura, insieme al diagramma approssimato della funzione di trasferimento in anello chiuso  $F$ . Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile e la sua banda passante arriva fino alla pulsazione  $10 \text{ rad/s}$ . Poiché però il segnale di riferimento contiene un'armonica a pulsazione  $100 \text{ rad/s}$  (fuori banda), il sistema non è in grado di inseguire correttamente tale segnale di riferimento.



## *Lezione 10*

Prestazioni statiche dei  
sistemi di controllo

## Errore a transitorio esaurito

Le prestazioni statiche di un sistema di controllo fanno riferimento al suo comportamento a **transitorio esaurito**, ossia alla situazione in cui il sistema, dopo un transitorio dovuto alla variazione dei suoi ingressi, si è portato in una condizione di regime. In particolare saremo interessati, in questa condizione, all'**errore** tra il segnale di riferimento e la variabile controllata.

Prerequisito del sistema di controllo, necessario per poter parlare di prestazioni statiche, è evidentemente l'**asintotica stabilità** del sistema in anello chiuso.

Prenderemo in considerazione il seguente sistema di controllo, supposto asintoticamente stabile:

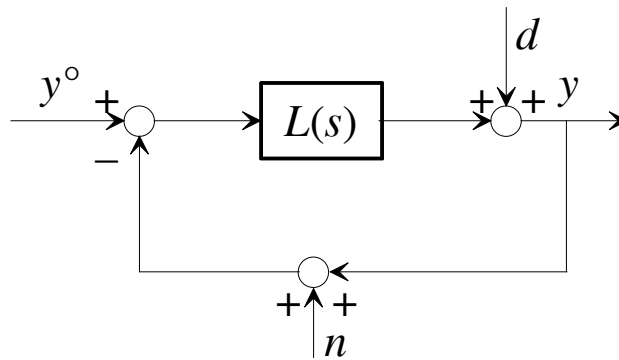


Fig. 1 : Sistema di controllo

Si osservi che con una rielaborazione formale dello schema a blocchi è possibile mettere direttamente in evidenza l'errore tra  $y^o$  e  $y$ :

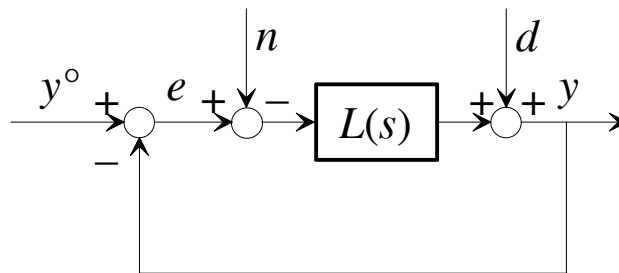
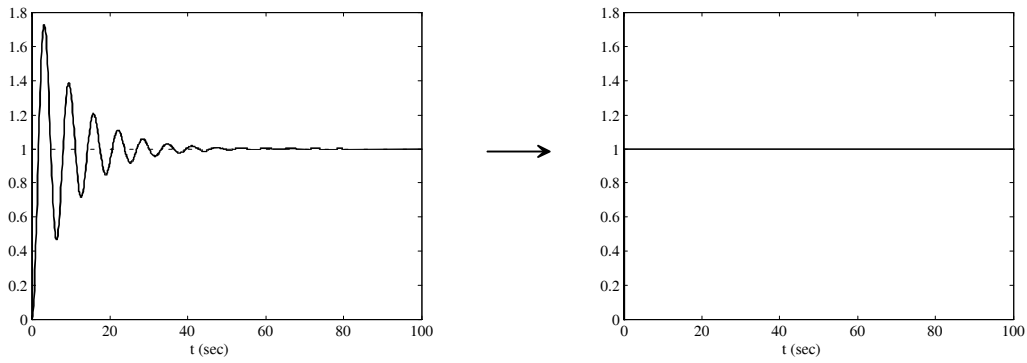


Fig. 2 : Sistema di controllo con in evidenza l'errore

Per lo studio delle prestazioni statiche è sufficiente riferirsi ad un insieme dei segnali di ingresso ristretto ai cosiddetti **segnali canonici**, come lo scalino, la rampa, la parabola ecc.

Infatti, ai fini della valutazione dell'errore a regime, sono del tutto irrilevanti le eventuali variazioni transitorie subite dal segnale di ingresso, del quale riveste interesse solo il comportamento asintotico ( $t \rightarrow \infty$ ).



*Fig. 3 : Equivalenza tra generici segnali e segnali canonici ai fini della valutazione delle prestazioni statiche*

Essendo il sistema di controllo lineare, potremo valutare separatamente l'effetto sull'errore dovuto al segnale di riferimento ed ai disturbi (principio di sovrapposizione degli effetti).

## Errore dovuto al segnale di riferimento

La funzione di trasferimento dal riferimento  $y^\circ$  all'errore  $e$  è la seguente:

$$\frac{E(s)}{Y^\circ(s)} = \frac{1}{1+L(s)}.$$

Scriviamo la funzione di trasferimento d'anello nella seguente forma:

$$L(s) = \frac{\mu_L}{s^{g_L}} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_k (1+s\tau_k)},$$

e calcoliamo il valore limite dell'errore utilizzando il teorema del valore finale (applicabile essendo il sistema asintoticamente stabile):

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1+L(s)} Y^\circ(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1 + \frac{\mu_L}{s^{g_L}} \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_k (1+s\tau_k)}} Y^\circ(s) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1 + \frac{\mu_L}{s^{g_L}}} Y^\circ(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{g_L+1}}{s^{g_L} + \mu_L} Y^\circ(s) \right] \end{aligned}$$

Se  $y^\circ(t) = \text{Asca}(t)$ , risulta:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{g_L+1}}{s^{g_L} + \mu_L} \frac{A}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ A \frac{s^{g_L}}{s^{g_L} + \mu_L} \right] = \begin{cases} A, & g_L < 0 \\ \frac{A}{1 + \mu_L}, & g_L = 0 \\ 0, & g_L \geq 1 \end{cases}$$

Se  $y^\circ(t) = \text{Aram}(t)$ , risulta:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{g_L+1}}{s^{g_L} + \mu_L} \frac{A}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ A \frac{s^{g_L}}{s^{g_L+1} + s\mu_L} \right] = \begin{cases} \infty, & g_L \leq 0 \\ \frac{A}{\mu_L}, & g_L = 1 \\ 0, & g_L \geq 2 \end{cases}$$

Se  $y^\circ(t) = \text{Apar}(t)$ , risulta:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{g_L+1}}{s^{g_L} + \mu_L} \frac{A}{s^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ A \frac{s^{g_L}}{s^{g_L+2} + s^2\mu_L} \right] = \begin{cases} \infty, & g_L \leq 1 \\ \frac{A}{\mu_L}, & g_L = 2 \\ 0, & g_L \geq 3 \end{cases}$$

Pertanto, per valori negativi del tipo  $g_L$  della funzione di trasferimento d'anello, l'errore è sempre infinito, o, tutt'al più, nel caso dell'ingresso a scalino, pari all'ampiezza stessa dello scalino in ingresso: si tratta di situazioni di nessun interesse pratico. Per valori del tipo



maggiori o uguali a zero, si può compilare la seguente tabella:

$g_L$	$Asca(t)$	$Aram(t)$	$Apar(t)$
0	$\frac{A}{1+\mu_L}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{A}{\mu_L}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{A}{\mu_L}$

Si osservi che, quando l'errore assume un valore finito e non nullo, esso è tanto più piccolo quanto maggiore è il valore del guadagno d'anello  $\mu_L$ .

### ***Esempio***

Sia:

$$L(s) = \frac{10}{s} \frac{1+s}{1+10s}.$$

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, come si ricava immediatamente dall'analisi del polinomio caratteristico in anello chiuso.

Poiché il tipo di  $L$  vale  $g_L = 1$ , si ha errore a transitorio esaurito nullo con riferimento a scalino, infinito con riferimento a parabola, mentre con ingresso a rampa, l'errore a regime è pari all'ampiezza della rampa diviso 10.

## Errore dovuto al disturbo in linea di andata

Dallo schema di Fig.2 si ottiene la funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  all'errore  $e$ :

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{1}{1+L(s)}.$$

A parte il segno, si tratta della stessa funzione di trasferimento presente tra il riferimento e l'errore. Pertanto tutti i risultati della discussione precedente possono ancora essere utilizzati, pur di tenere conto del cambiamento di segno.

Si possono tuttavia presentare dei casi in cui il disturbo non entra nello schema a blocchi del sistema di controllo come raffigurato in Fig. 2, ossia direttamente in uscita alla funzione di trasferimento del processo. Per poter utilizzare ancora la tabella delle prestazioni statiche, occorre allora "riportare" il disturbo in uscita, considerando uno schema analogo a quello di Fig.2, in cui il disturbo in uscita è tale da dare gli stessi effetti a transitorio esaurito del disturbo effettivo.

Si considerino i seguenti due casi:

- a) Il disturbo entra nel sistema di controllo passando attraverso un sistema di funzione di trasferimento  $H(s)$ :

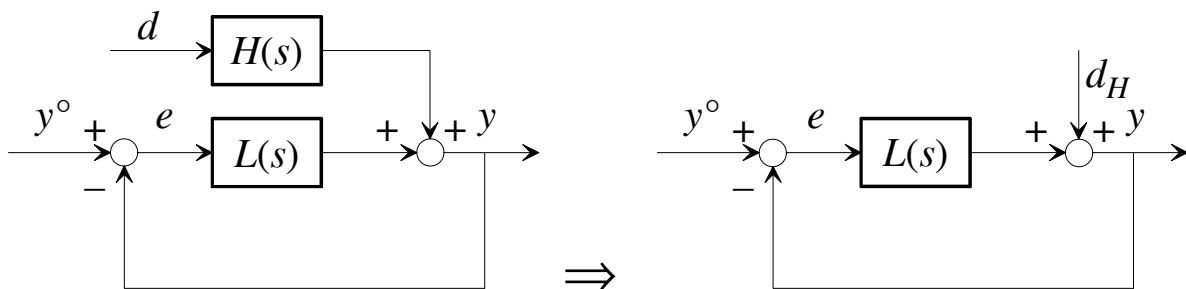


Fig. 4 : Sistema di controllo con disturbo filtrato

Detti  $\mu_H$  e  $g_H$  guadagno e tipo di  $H(s)$ , il disturbo riportato in uscita,  $d_H$ , equivalente agli effetti statici al disturbo effettivo  $d$ , avrà trasformata:

$$D_H(s) = \frac{\mu_H}{s^{g_H}} D(s).$$

Si osservi infatti che gli eventuali poli o zeri di  $H$  non nell'origine non hanno alcun effetto sul comportamento a regime ( $s \rightarrow 0$ ).

- b) Il disturbo entra nel sistema di controllo a monte del processo, ossia del sistema di funzione di trasferimento  $G(s)$  (disturbo di *carico*):

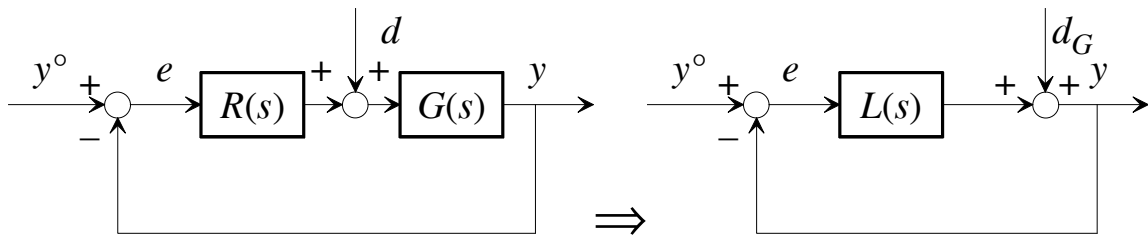


Fig. 5 : Sistema di controllo con disturbo di carico

Detti  $\mu_G$  e  $g_G$  guadagno e tipo di  $G(s)$ , il disturbo riportato in uscita,  $d_G$ , equivalente agli effetti statici al disturbo effettivo  $d$ , avrà trasformata:

$$D_G(s) = \frac{\mu_G}{s^{g_G}} D(s).$$

### Esempio

Con riferimento alla Fig. 4, sia:

$$R(s) = 5, \quad G(s) = \frac{6}{s} \frac{1+3s}{1+4s}, \quad d(t) = 3\text{sca}(t).$$

La funzione di trasferimento d'anello risulta:

$$L(s) = \frac{30}{s} \frac{1+3s}{1+4s}.$$

Il polinomio caratteristico è:

$$\chi(s) = 30(1+3s) + s(1+4s) = 4s^2 + 91s + 30,$$

ed ha le due radici a parte reale negativa, il che comporta che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Il disturbo  $d_G$  riportato in uscita ha trasformata:

$$D_G(s) = \frac{6}{s} D(s) = \frac{6}{s} \frac{3}{s} = \frac{18}{s^2}.$$

Pertanto:

$$d_G(t) = 18\text{ram}(t).$$

Poiché il tipo della funzione di trasferimento d'anello vale  $g_L = 1$ , ed il guadagno  $\mu_L = 30$ , dalla tabella si ottiene:

$$e_\infty = -\frac{18}{30} = -0.6.$$

## Errore dovuto al disturbo in linea di retroazione

Dallo schema di Fig.2 si ottiene la funzione di trasferimento dal disturbo  $n$  all'errore  $e$ :

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)} = F(s).$$

Calcoliamo il valore limite dell'errore utilizzando il teorema del valore finale:

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{L(s)}{1+L(s)} N(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{\frac{\mu_L}{s^{g_L}}}{1 + \frac{\mu_L}{s^{g_L}}} N(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\mu_L s}{s^{g_L} + \mu_L} N(s) \right]$$

Se  $n(t) = \text{Asca}(t)$ , risulta:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\mu_L s}{s^{g_L} + \mu_L} \frac{A}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ A \frac{\mu_L}{s^{g_L} + \mu_L} \right] = \begin{cases} A \frac{\mu_L}{1 + \mu_L}, & g_L = 0 \\ A, & g_L \geq 1 \end{cases}$$

Se  $n(t) = \text{Aram}(t)$ , risulta:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\mu_L s}{s^{g_L} + \mu_L} \frac{A}{s^2} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ A \frac{\mu_L}{s^{g_L+1} + \mu_L s} \right] = \infty, \quad \forall g_L \geq 0.$$

Se  $n(t) = \text{Apar}(t)$ , risulta:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{\mu_L s}{s^{g_L} + \mu_L} \frac{A}{s^3} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ A \frac{\mu_L}{s^{g_L+2} + \mu_L s^2} \right] = \infty, \quad \forall g_L \geq 0.$$

Si può compilare la seguente tabella:

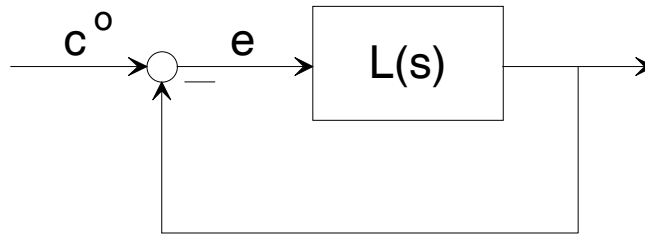
$g_L$	$\text{Asca}(t)$	$\text{Aram}(t)$	$\text{Apar}(t)$
0	$A \frac{\mu_L}{1 + \mu_L}$	$\infty$	$\infty$
1	$A$	$\infty$	$\infty$
2	$A$	$\infty$	$\infty$

Quindi l'errore si mantiene finito solo per disturbo a scalino dove però è pari all'ampiezza del disturbo stesso per tipo maggiore o uguale a 1, e se ne scosta solo leggermente per tipo uguale a zero (si ricorda che  $\mu_L$  deve essere un numero elevato per garantire errore piccolo sul riferimento e sul disturbo in linea di andata).

E' allora evidente che, in presenza di un trasduttore con errore statico, il sistema di controllo non può garantire a regime una precisione migliore di quella del trasduttore.

## Esercizi

### Esercizio 10.1



Con riferimento al sistema retroazionato di figura, si valuti l'errore  $e$  a transitorio esaurito quando:

$$L(s) = \frac{10}{s} \frac{1}{(1+s)^2}$$

$$e \ c^o(t) = sca(t).$$

### Esercizio 10.2

Con riferimento al sistema retroazionato di figura, si valuti l'errore  $e$  a transitorio esaurito quando:

$$L(s) = \frac{10}{s^2 + s}$$

e:

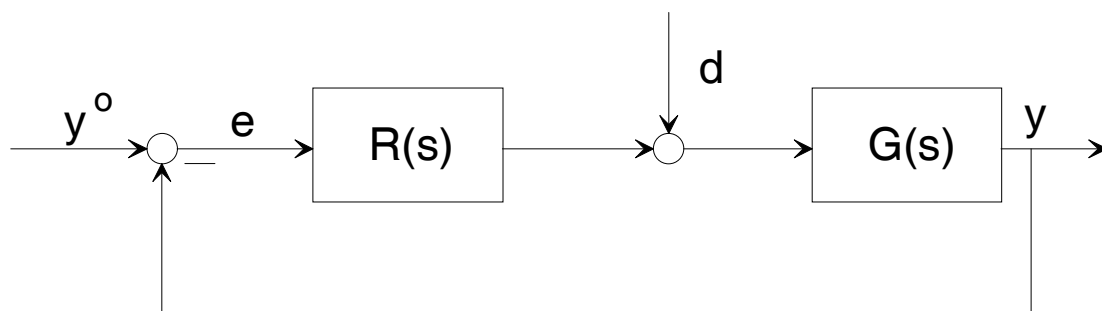
a)  $c^o(t) = sca(t)$

b)  $c^o(t) = ram(t)$

c)  $c^o(t) = sca(t) + par(t)$

### Esercizio 10.3

Si valuti l'errore  $e$  a transitorio esaurito nel seguente schema di controllo:



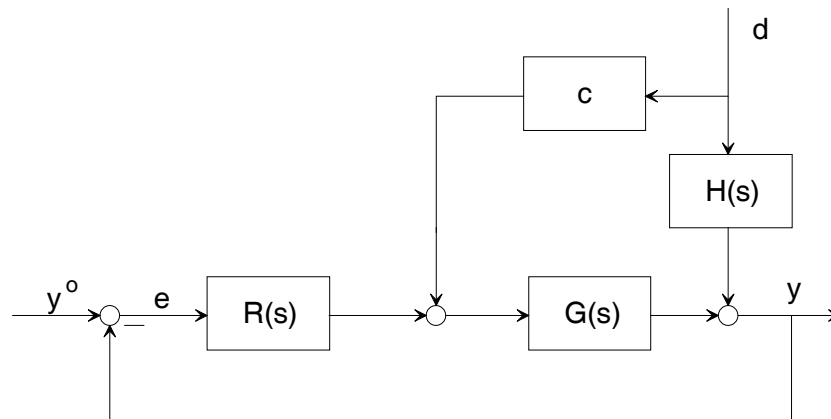
in cui:

$$G(s) = \frac{5}{s(1+s)}, \quad R(s) = 2$$

$$y^o(t) = ram(t), \quad d(t) = 10 \ sca(t).$$

### Esercizio 10.4

Con riferimento al seguente schema di controllo:



in cui:

$$G(s) = \frac{10}{1+s}, \quad H(s) = 20 \frac{1-s}{(1+s)^2}, \quad R(s) = 100$$

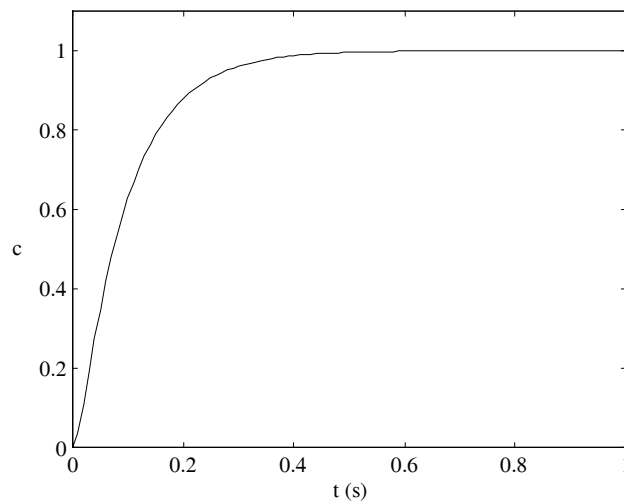
si determini il parametro  $c$  in modo tale che l'errore  $e$  a transitorio esaurito prodotto da un disturbo:

$$d(t) = sca(t)$$

sia nullo.

### Esercizio 10.5

Sapendo che la risposta allo scalino di un sistema di controllo assume l'andamento riportato di seguito:



individuare l'espressione corretta della funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$  tra quelle riportate di seguito:

$$L_1(s) = \frac{10}{s(1+0.01s)} \quad L_2(s) = \frac{1}{s(1+0.1s)} \quad L_3(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)} \quad L_4(s) = \frac{10}{1+0.1s} .$$

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 10.1

Poiché il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile, come si ricava facilmente dal criterio di Bode, non ha senso parlare di errore a transitorio esaurito (l'errore diverge).

### Esercizio 10.2

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (dal criterio di Bode). La funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$  ha tipo  $g = 1$  e guadagno  $\mu = 10$ . Dalle tabelle si ricava:

a)  $e_\infty = 0$

b)  $|e_\infty| = \frac{1}{\mu} = 0.1$

c)  $e_\infty = \infty$  (prevale il contributo della parabola).

### Esercizio 10.3

La funzione di trasferimento d'anello vale:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{10}{s(1+s)}$$

ed ha tipo  $g = 1$  e guadagno  $\mu = 10$ . Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (dal criterio di Bode). Il disturbo  $d$  si può riportare in uscita, e agli effetti statici equivale al segnale:

$$d_G(t) = 50 \text{ram}(t) .$$

Dalle tabelle si ricava:

Contributo d'errore dovuto a  $y^o$ :  $e_{y^o_\infty} = \frac{1}{\mu} = 0.1$

Contributo d'errore dovuto a  $d_G$ :  $e_{d_\infty} = -\frac{50}{\mu} = -5$

L'errore complessivo a transitorio esaurito vale quindi:

$$e_\infty = -4.9$$

### Esercizio 10.4

Il sistema di funzione di trasferimento  $H(s)$  è asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento d'anello vale:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{1000}{1+s}$$

per cui il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (dal criterio di Bode).

La funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  all'errore  $e$  vale:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -\frac{H(s) + cG(s)}{1 + L(s)} .$$

Dal teorema del valore finale si deduce che per rendere nullo l'errore a transitorio esaurito deve essere soddisfatta la condizione:

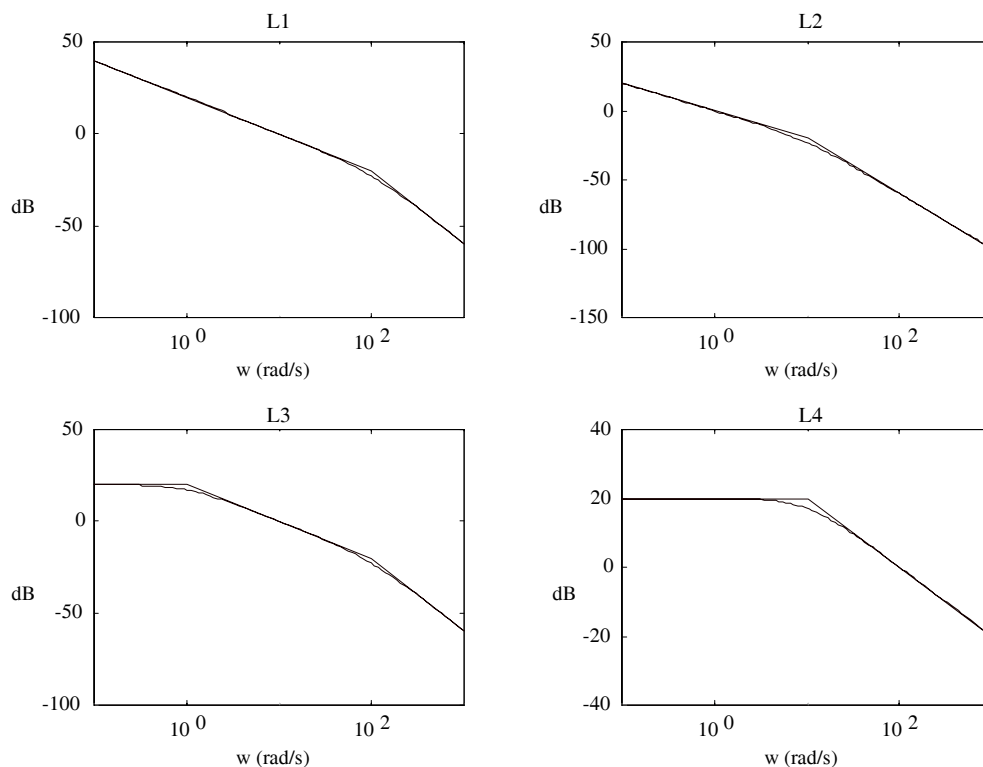
$$H(0) + cG(0) = 0$$

da cui:

$$c = -\frac{H(0)}{G(0)} = -\frac{20}{10} = -2.$$

### Esercizio 10.5

I diagrammi di Bode del modulo delle 4 funzioni di trasferimento sono riportati in figura:



In tutti i casi il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile. La risposta allo scalino del sistema in anello chiuso evidenzia una dinamica con costante di tempo pari a  $0.1s$ . La pulsazione critica dovrà quindi essere pari a  $10 \text{ rad/s}$ , il che esclude la  $L_2$  e la  $L_4$ . Poiché la risposta evidenzia anche errore a transitorio esaurito nullo, la funzione di trasferimento d'anello deve presentare un integratore, il che esclude anche la  $L_3$ . La funzione di trasferimento corretta è quindi la  $L_1$ .



## *Lezione 11*

# Progetto del controllore

## Specifiche di progetto

Consideriamo nuovamente un sistema di controllo in retroazione:

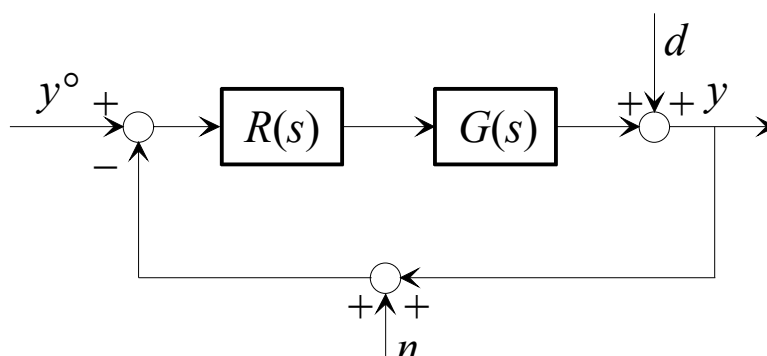


Fig. 1 : Sistema di controllo

Supporremo assegnata la funzione di trasferimento  $G(s)$ , e ci porremo l'obiettivo della **sintesi** (o **progetto**) della funzione di trasferimento  $R(s)$  del controllore, sulla base di un certo numero di specifiche.

Il metodo che seguiremo<sup>1</sup> sarà basato sul criterio di Bode, e come tale prevederà il rispetto, da parte della funzione di trasferimento d'anello  $L(s) = R(s)G(s)$ , delle ipotesi necessarie per l'applicabilità del criterio. Ciò comporta, in particolare, che il metodo non sarà applicabile se  $G(s)$  ha poli a parte reale positiva. Infatti tali poli, che non possono essere cancellati da corrispondenti zeri nella funzione di trasferimento  $R(s)$ , si presentano anche in  $L(s)$ , violando una condizione del criterio.

Le specifiche con le quali tipicamente si imposta il progetto sono le seguenti:

### 1. Asintotica stabilità

In base al criterio di Bode questa specifica implica:

$$\boxed{\varphi_m > 0}.$$

### 2. Grado di stabilità e robustezza

La stabilità deve essere garantita con un certo margine rispetto ad inesattezze nella modellistica del sistema sotto controllo. Inoltre si vuole che il sistema di controllo, sollecitato da ingressi canonici (scalino, impulso), esibisca risposte ben smorzate. Entrambe queste condizioni sono approssimativamente soddisfatte se il margine di fase dell'anello è superiore di un valore limite, di volta in volta specificato:

$$\boxed{\varphi_m > \overline{\varphi_m}}.$$

### 3. Velocità di risposta

Il sistema di controllo deve reagire prontamente a variazioni nel segnale di riferimento o sui disturbi. Sappiamo che, se il margine di fase è sufficientemente elevato, i transitori del sistema in anello chiuso sono governati da una costante di tempo pari all'inverso della

---

<sup>1</sup> Per una trattazione analoga a quella qui presentata ma di maggiore respiro, si può consultare il Capitolo 2 del testo: "Esercizi di Controlli Automatici", G.O. Guardabassi e P. Rocco, Pitagora Editrice.

pulsazione critica  $\omega_c$ . Imporre un valore massimo alla durata dei transitori equivale quindi ad imporre un valore minimo alla pulsazione critica:

$$\omega_c \geq \bar{\omega}_c.$$

#### 4. Precisione statica

A seguito dell'imposizione di assegnati segnali canonici agli ingressi, l'errore tra riferimento e variabile controllata deve essere, a transitorio esaurito, nullo o inferiore in modulo ad una assegnata soglia:

$$|e_\infty| \leq \bar{e}_\infty.$$

#### 5. Specifiche aggiuntive

Talvolta possono essere date delle ulteriori specifiche, come l'uso di un controllore dalla struttura assegnata (cioè con un dato numero di poli e zeri), limitazioni all'azione di controllo, attenuazione di specifici disturbi (tipicamente sinusoidali).

# Impostazione del progetto

Il progetto viene di norma suddiviso in due fasi:

## 1. Progetto statico

E' la fase in cui ci si preoccupa di soddisfare la specifica relativa alle prestazioni statiche (errore a transitorio esaurito). Si affronta con l'ipotesi preliminare di essere in grado di rendere il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile nella successiva fase di progetto dinamico.

Si fattorizza la funzione di trasferimento del regolatore come segue:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s),$$

con:

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}, \quad R_2(s) = \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_k (1 + s\tau_k)}.$$

Dal momento che  $R_2(0) = 1$ , le prestazioni statiche sono unicamente determinate dalle scelte effettuate sui parametri di  $R_1(s)$ . Per non complicare la successiva fase di progetto, si sceglie:

- il valore minimo del tipo  $g_R$  che consente di soddisfare la specifica statica;
- fissato  $g_R$ , il valore minimo del guadagno  $\mu_R$  che consente di soddisfare la specifica.

Può succedere, a valle della scelta del tipo del regolatore, che il valore del guadagno risulti indeterminato: in questo caso è possibile assegnare il guadagno in fase di progetto dinamico.

## 2. Progetto dinamico

Si determina  $R_2(s)$  (poli e zeri del controllore), in modo tale da soddisfare le specifiche dinamiche su margine di fase e velocità di risposta. Si procede per mezzo di una serie, ragionata, di tentativi di sintesi.

## Esempio introduttivo

Si consideri il sistema di controllo di figura:

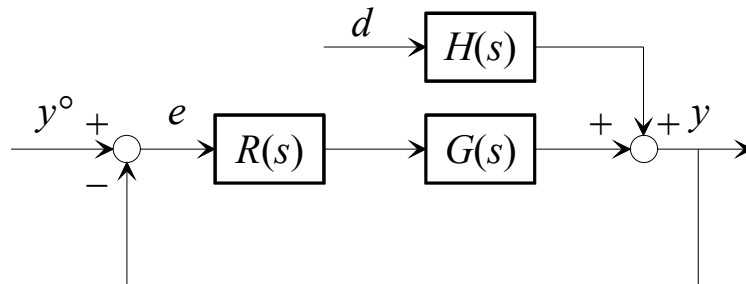


Fig. 2 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(1+s)(1+10s)}, \quad H(s) = \frac{5}{1+0.01s}.$$

Si vuole progettare il regolatore  $R(s)$  in modo tale che:

- $|e_\infty| \leq 0.025$  per  $y^o(t) = 10 \text{ sca}(t)$ ,  $d(t) = \pm \text{sca}(t)$ ;
- $\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$ ;
- $\varphi_m \geq 60^\circ$ .

### Progetto statico

Fattorizzata  $R(s)$  come:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s), \quad R_2(0) = 1,$$

si deve progettare  $R_1(s) = \mu_R / s^{g_R}$  in modo da soddisfare la specifica sull'errore a transitorio esaurito. Ipotizzando il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile e facendo uso, in virtù della linearità del sistema, del principio di sovrapposizione degli effetti, calcoliamo l'errore dovuto al segnale di riferimento:

$$\begin{aligned} e_\infty^o &= \lim_{s \rightarrow 0} [sE^o(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1+L(s)} Y^o(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1 + \frac{50\mu_R}{s^{g_R}}} \frac{10}{s} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s^{g_R}}{s^{g_R} + 50\mu_R} = \begin{cases} \frac{10}{1+50\mu_R}, & g_R = 0 \\ 0, & g_R \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Il risultato è coerente con le tabelle della precisione statica della Lezione 10, pur di tenere conto che il guadagno d'anello vale  $50\mu_R$  e che lo scalino ha ampiezza 10.

Passando all'errore dovuto al disturbo, si ha:

$$e_{d\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} [sE_d(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{-H(s)}{1+L(s)} D(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{-5}{1 + \frac{50\mu_R}{s^{g_R}}} \left( \pm \frac{1}{s} \right) \right] =$$

$$= \mp \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s^{g_R}}{s^{g_R} + 50\mu_R} = \begin{cases} \mp \frac{5}{1+50\mu_R}, & g_R = 0 \\ 0, & g_R \geq 1 \end{cases}$$

Anche in questo caso il risultato è coerente con le tabelle, tenendo conto che il disturbo va riportato in uscita (e quindi, agli effetti statici, va moltiplicato per il guadagno di  $H(s)$ ).

Appare evidente che per entrambi i segnali di ingresso (riferimento e disturbo), la specifica sull'errore può essere garantita con regolatore di tipo nullo ( $g_R = 0$ ). Adottando questo valore ed assumendo il guadagno  $\mu_R$  positivo, si ha:

$$|e_{\infty}| = |e_{\infty}^o + e_{\infty}^d| \leq |e_{\infty}^o| + |e_{\infty}^d| = \frac{10}{1+50\mu_R} + \frac{5}{1+50\mu_R} = \frac{15}{1+50\mu_R}.$$

La specifica statica sarà quindi senz'altro soddisfatta se:

$$\frac{15}{1+50\mu_R} \leq 0.025 \Rightarrow \mu_R \geq \frac{15-0.025}{1.25} \approx 12.$$

Rispetto al valore limite calcolato dalla precedente disuguaglianza, conviene predisporre un opportuno margine di sicurezza, inteso a cautelarsi verso le inevitabili incertezze sui parametri del processo e sul valore dei disturbi. Un valore opportuno potrebbe allora essere  $\mu_R = 20$ .

Il progetto statico è allora concluso con la scelta della funzione di trasferimento:

$$R_1(s) = 20.$$

### **Progetto dinamico**

La funzione di trasferimento d'anello del sistema può essere scritta come:

$$L(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = R_2(s)L_1(s),$$

con:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{1000}{(1+0.1s)(1+s)(1+10s)}.$$

Il primo tentativo da eseguire per il progetto di  $R_2(s)$  consiste nel porre banalmente  $R_2(s) = 1$ . La funzione di trasferimento d'anello coincide, allora, con  $L_1(s)$ , ed il relativo diagramma di Bode del modulo asintotico è tracciato di seguito:

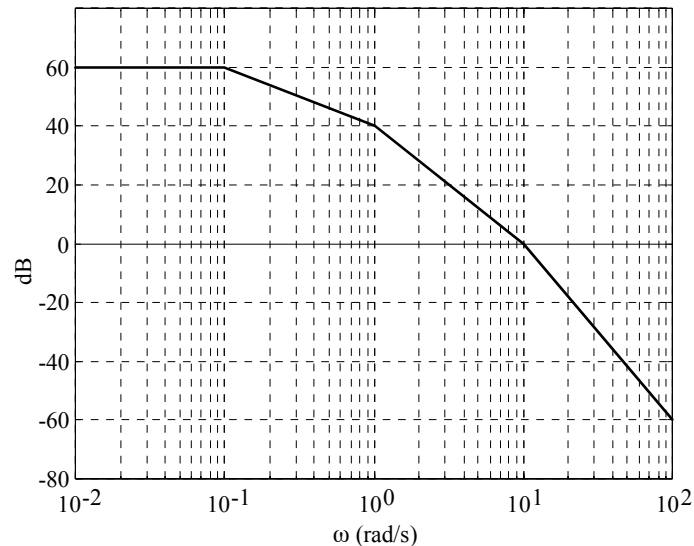


Fig. 3 : Diagramma di Bode asintotico di  $|L_1|$

Mentre la pulsazione critica è abbondantemente superiore al valore limite imposto dalla specifica, il margine di fase risulta, come facilmente calcolabile, negativo, per cui il sistema in anello chiuso risulterebbe addirittura instabile.

Per il progetto di  $R_2(s)$  si può ricorrere all'osservazione fatta nella Lezione 8 a proposito del criterio di Bode, riguardo ai sistemi a **fase minima**. Si ricorda che, per un sistema a fase minima, il fatto che l'attraversamento dell'asse a 0 dB da parte del diagramma asintotico del modulo della risposta in frequenza di  $L$  avvenga con pendenza  $-1$  ( $-20$  dB/decade) garantisce di norma un margine di fase positivo, tanto più prossimo ai  $90^\circ$ , quanto più ampio è il tratto di pendenza  $-1$ .

Conviene allora procedere determinando preliminarmente un opportuno andamento per il diagramma del modulo di  $L$  e, a posteriori, risalire all'espressione della funzione di trasferimento del regolatore.

Il **metodo di progetto**, di natura grafica, consiste nell'individuare sull'asse a 0 dB un valore di pulsazione, superiore al limite inferiore richiesto per la pulsazione critica, e per questo punto tracciare un tratto di retta a pendenza  $-1$ , destinato ad essere un tratto del diagramma di  $|L|$ .

In **bassa frequenza** si può operare come segue:

- il diagramma di  $|L|$  deve avere la stessa pendenza di quello di  $|L_1|$ , altrimenti si modificherebbe il tipo del regolatore in sede di progetto dinamico;
- se il progetto statico si è concluso con un vincolo sul valore del guadagno  $\mu_R$ , il valore di  $|L|$  deve essere maggiore o uguale (di fatto è comodo sceglierlo uguale) a quello di  $|L_1|$ .

In **alta frequenza**, invece:

- il diagramma di  $|L|$  deve avere pendenza maggiore o uguale in modulo (di fatto è comodo sceglierla uguale) a quella di  $|L_1|$ , altrimenti si perverrebbe al progetto di un regolatore non realizzabile (con più zeri che poli);
- il valore di  $|L|$  deve essere minore o uguale a quello di  $|L_1|$ , per garantire la moderazione del controllo.

L'applicazione del metodo all'esempio porta, scegliendo come pulsazione critica il valore 2 rad/s, al grafico di  $|L|$  di figura 4.

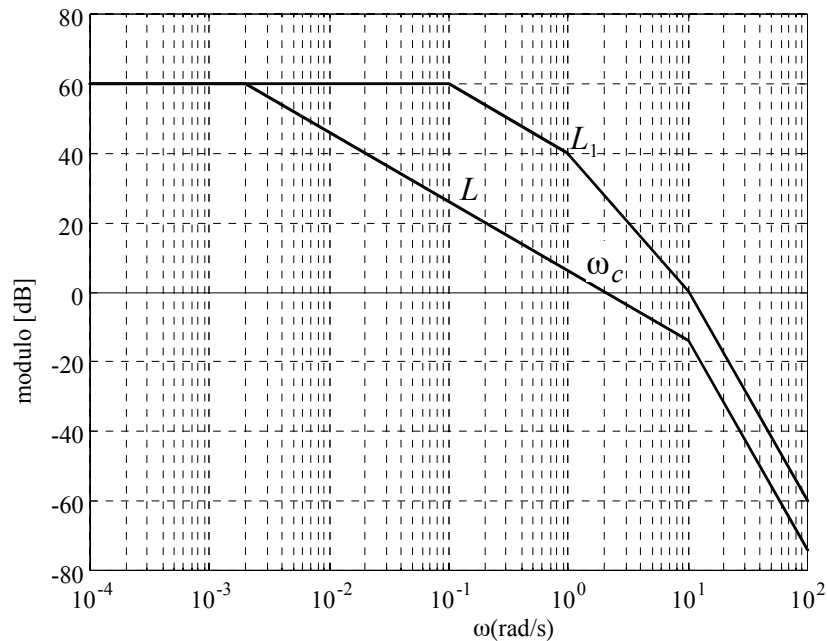


Fig. 4 : Diagramma di Bode asintotico di  $|L|$

Il margine di fase risulta:

$$\varphi_m = 180^\circ - \left| -\arctan(2/0.002) - 2\arctan(2/10) \right| = 180^\circ - \left| -90^\circ - 2 \times 11^\circ \right| = 68^\circ.$$

Le specifiche dinamiche sono quindi soddisfatte, e risulta:

$$L(s) = \frac{1000}{\left(1 + \frac{s}{0.002}\right)\left(1 + \frac{s}{10}\right)^2} = \frac{1000}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)^2}$$

Ne consegue:

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{1000}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)^2} \frac{(1 + 0.1s)(1 + s)(1 + 10s)}{1000} = \frac{(1 + s)(1 + 10s)}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)}.$$

Infine:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 20 \frac{(1 + s)(1 + 10s)}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)}.$$

Si osservi che in alta frequenza il diagramma di  $|L|$  non si congiunge con il diagramma di  $|L_1|$ . Sarebbe stato lecito congiungere i due diagrammi, ma in questo caso si sarebbe ottenuto, come è facile verificare, un controllore di ordine 3 (con 3 poli), più problematico da realizzare.



## Esempio di progetto per sistemi di tipo 1

Per il sistema di controllo di figura:

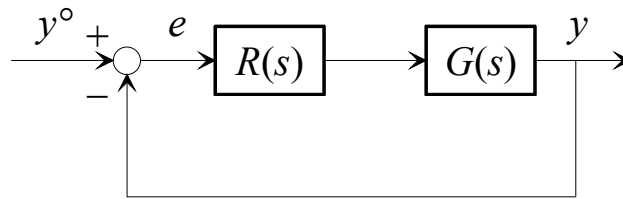


Fig. 5 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)},$$

si vuole progettare il regolatore  $R(s)$  in modo tale che:

- $e_\infty = 0$  per  $y^o(t) = sca(t)$ ;
- $\omega_c \geq 2 \text{ rad/s}$ ;
- $\phi_m \geq 40^\circ$ .

### Progetto statico

Procedendo come nell'esempio precedente, si ha:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1+L(s)} Y^o(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{1}{1 + \frac{10 \mu_R}{s} \frac{1}{s^{g_R}}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_R+1}}{s^{g_R+1} + 10\mu_R} = 0, \quad \forall g_R \geq 0$$

In questo caso, anche con regolatore di tipo nullo ( $g_R = 0$ ) si ottiene errore statico nullo. Il tipo della funzione di trasferimento d'anello è infatti la somma del tipo del sistema sotto controllo e del tipo del controllore:

$$g_L = g_G + g_R.$$

Poiché nel presente caso  $g_G = 1$ , è sufficiente imporre  $g_R = 0$  per avere un anello di tipo 1.

Il progetto statico quindi non impone nessun vincolo al regolatore e potremo porre, formalmente:

$$R_1(s) = 1.$$

### Progetto dinamico

Poiché:

$$L(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = R_2(s)G(s),$$

conviene tracciare il diagramma del modulo di  $G$  per controllare se le specifiche sono già soddisfatte con  $R_2 = 1$ :

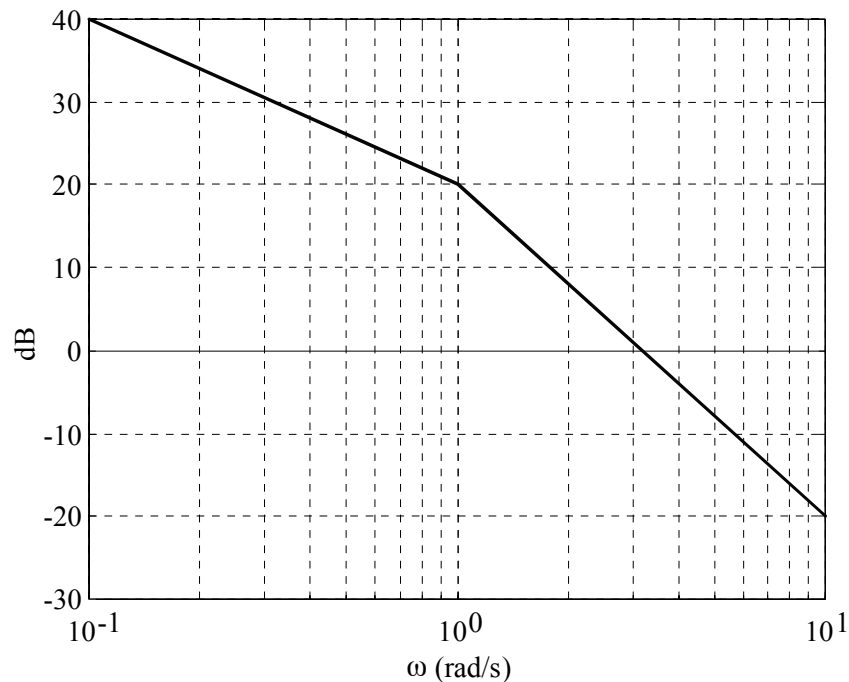


Fig. 6 : Diagramma di Bode asintotico di  $|G|$

Si ha  $\omega_c = 3$ , ma:

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - \arctan(3)| = 180^\circ - |-90^\circ - 71^\circ| = 19^\circ ,$$

che non soddisfa la specifica.

La soluzione grafica del progetto dinamico è riportata in Fig. 7: si osservi che in bassa frequenza si è evitato di raccordare i diagrammi del modulo di  $L$  e  $G$ , in quanto il progetto statico non impone alcun vincolo sul guadagno del regolatore.

Si ottiene  $\omega_c = 2$ , e:

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - \arctan(2/5)| = 180^\circ - |-90^\circ - 22^\circ| = 68^\circ .$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = \frac{2}{s} \frac{1}{1+s/5} = \frac{2}{s} \frac{1}{1+0.2s} ,$$

da cui:

$$R(s) = R_2(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{2}{s} \frac{1}{1+0.2s} \frac{s(s+1)}{10} = 0.2 \frac{1+s}{1+0.2s} .$$

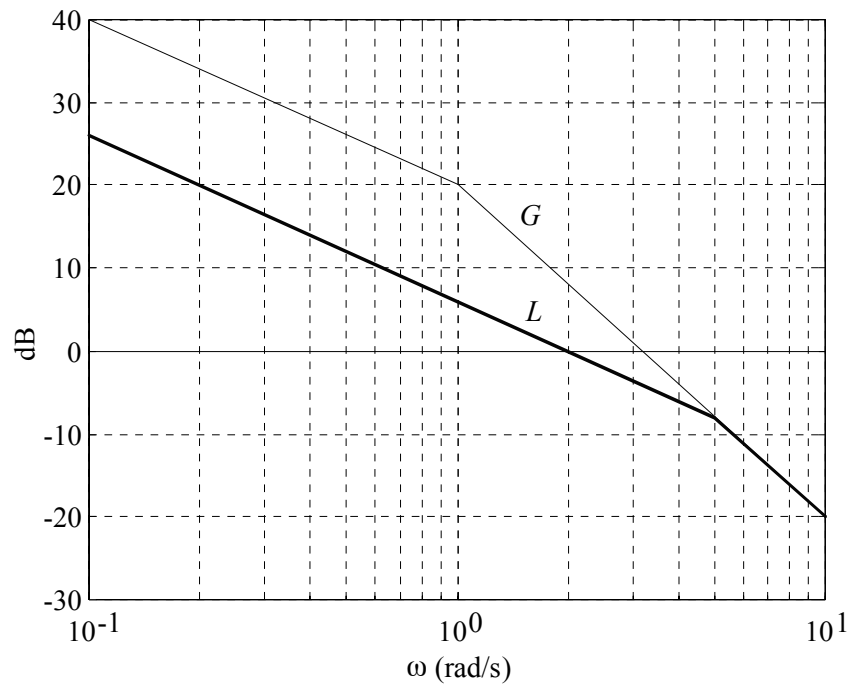


Fig. 7 : Diagrammi di Bode asintotici di  $|G|$  e  $|L|$

## Esempio di progetto per sistemi con zeri a parte reale positiva

Per il sistema di controllo di figura:

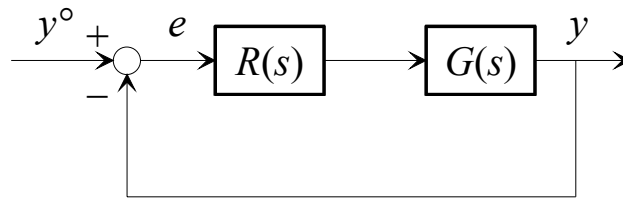


Fig. 8 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = 10 \frac{1-2s}{1+10s},$$

si vuole progettare il regolatore  $R(s)$  in modo tale che:

- $e_\infty = 0$  per  $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$ ;
- $\omega_c \geq 0.1 \text{ rad/s}$ ;
- $\varphi_m \geq 40^\circ$ .

Il progetto statico impone la presenza di un integratore nel controllore, mentre non ne vincola in alcun modo il guadagno. Possiamo allora porre:

$$R_1(s) = \frac{1}{s}.$$

Scritta la funzione di trasferimento d'anello come:

$$L(s) = R_2(s)L_1(s),$$

con:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{10}{s} \frac{1-2s}{1+10s},$$

tracciamo il diagramma di Bode del modulo di  $L_1$ :

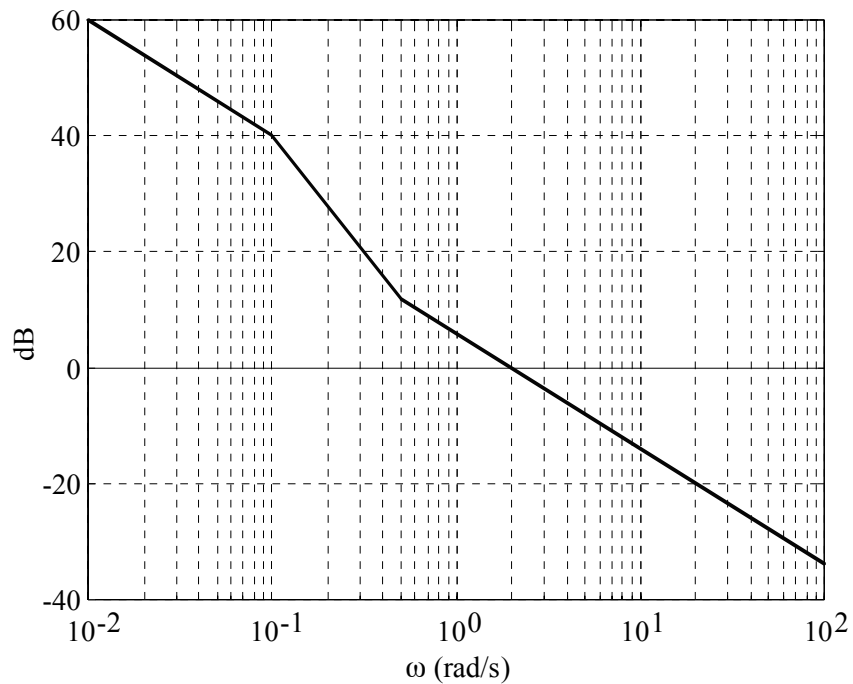


Fig. 9 : Diagramma di Bode asintotico di  $|L_1|$

Risulta  $\omega_c = 2$ , e:

$$\varphi_m = 180^\circ - \left| -90^\circ - \arctan(2/0.1) - \arctan(2/0.5) \right| = 180^\circ - \left| -90^\circ - 87^\circ - 76^\circ \right| = -73^\circ .$$

Il sistema in anello chiuso sarebbe quindi instabile.

Si osservi che il contributo di fase dello zero alla pulsazione 0.5 rad/s è negativo, essendo lo zero a parte reale positiva. Il sistema non è quindi “a fase minima”, ed il fatto che il diagramma del modulo tagli l’asse a 0 dB con pendenza  $-1$  non implica margine di fase positivo. D’altra parte lo zero non può essere cancellato da un corrispondente polo nel regolatore, pena il manifestarsi di una instabilità interna. L’unico provvedimento utile in questo caso è fare in modo che la pulsazione critica risulti sensibilmente inferiore alla pulsazione dello zero, in modo che il contributo negativo alla fase critica sia meno rilevante.

Si consideri ad esempio la soluzione riportata in figura:

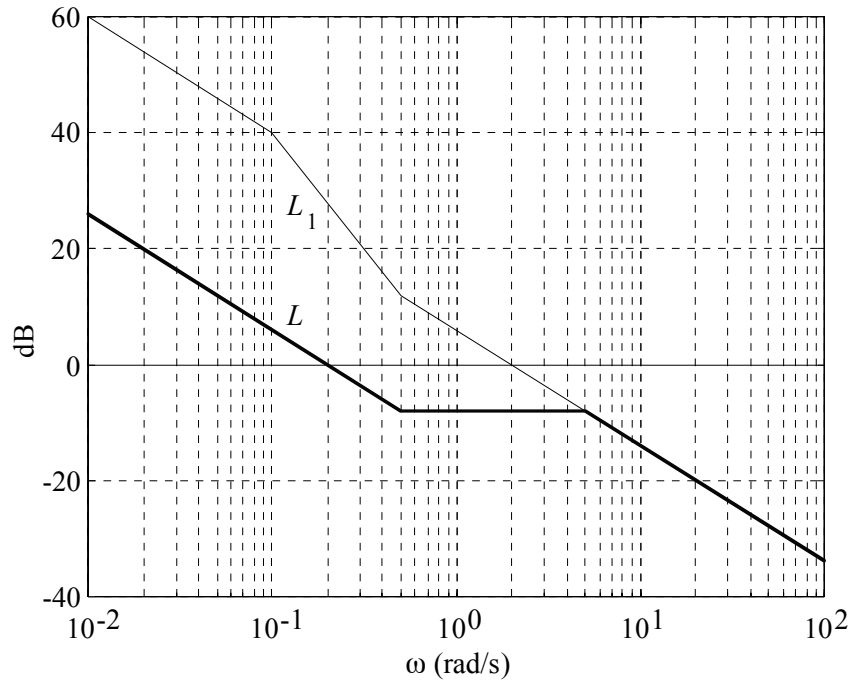


Fig. 10 : Diagrammi di Bode asintotici di  $|L_1|$  e  $|L|$

Risulta  $\omega_c = 0.2$ , e:

$$\varphi_m = 180^\circ - \left| -90^\circ - \arctan(0.2/0.5) - \arctan(0.2/5) \right| = 180^\circ - \left| -90^\circ - 22^\circ - 2^\circ \right| = 66^\circ .$$

Anche in questo esempio, come nel precedente, i diagrammi non sono stati raccordati in bassa frequenza, non essendoci un vincolo di guadagno dato dal progetto statico.

Risulta quindi:

$$L(s) = \frac{0.2}{s} \frac{1-2s}{1+s/5} = \frac{0.2}{s} \frac{1-2s}{1+0.2s} ,$$

da cui:

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{0.2}{s} \frac{1-2s}{1+0.2s} \frac{s}{10} \frac{1+10s}{1-2s} = 0.02 \frac{1+10s}{1+0.2s} ,$$

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{0.02}{s} \frac{1+10s}{1+0.2s} .$$

## Esempio di progetto per sistemi con ritardo

Per il sistema di controllo di figura:

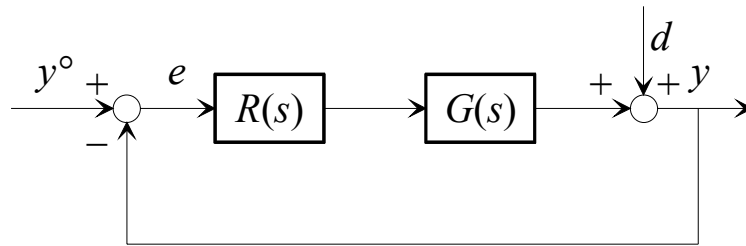


Fig. 11 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{(1+10s)(1+s)},$$

si vuole progettare il regolatore  $R(s)$  in modo tale che:

- $|e_\infty| \leq 0.15$  per  $d(t) = \pm sca(t)$ ;
- $\omega_c \geq 0.3 \text{ rad / s}$ ;
- $\varphi_m \geq 40^\circ$ .

### Progetto statico

Supposto il sistema di controllo asintoticamente stabile, il ritardo non gioca alcun ruolo nel determinare le prestazioni statiche. Dalle tabelle della precisione statica otteniamo che per funzione di trasferimento d'anello di tipo 0 risulta:

$$|e_\infty| = \frac{1}{1 + \mu_L}.$$

Pertanto, scelto un regolatore di tipo 0, si dovrà imporre:

$$\frac{1}{1 + \mu_R} \leq 0.15 \Rightarrow \mu_R \geq 5.67.$$

Possiamo cautelarci contro eventuali incertezze ponendo  $\mu_R = 10$ , e quindi concludere che:

$$R_1(s) = 10.$$

### Progetto dinamico

Scritta la funzione di trasferimento d'anello come:

$$L(s) = R_2(s)L_1(s) ,$$

con:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = 10 \frac{e^{-s}}{(1+10s)(1+s)} ,$$

tracciamo il diagramma di Bode del modulo di  $L_1$ :

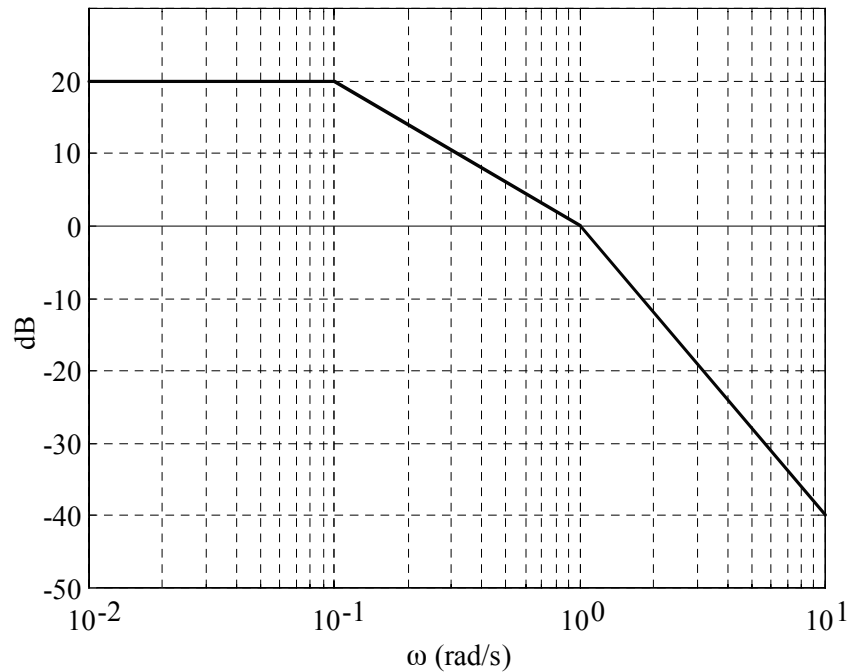


Fig. 12 : Diagramma di Bode asintotico di  $|L_1|$

Risulta  $\omega_c \approx 1$ , e:

$$\varphi_m \approx 180^\circ - \left| -\arctan(1/0.1) - \arctan(1) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} \right| = 180^\circ - \left| -84^\circ - 45^\circ - 1 \times 1 \times 57^\circ \right| = -6^\circ .$$

A causa della presenza del ritardo il sistema risulterebbe instabile.

Per il progetto si può considerare la soluzione di Fig. 13:



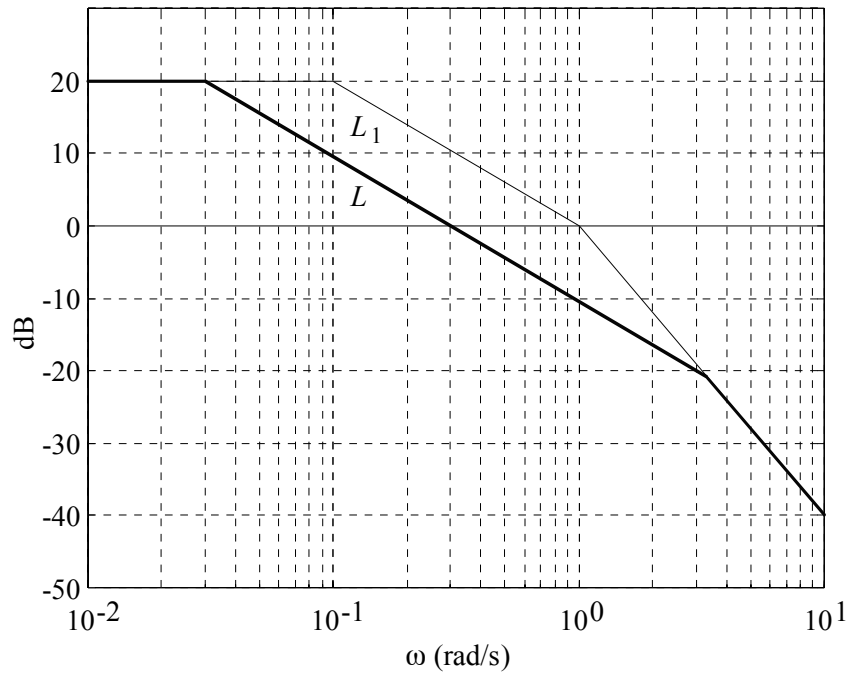


Fig. 13 : Diagrammi di Bode asintotici di  $|L_1|$  e  $|L|$

Risulta  $\omega_c \approx 0.3$ , e:

$$\varphi_m \approx 180^\circ - \left| -\arctan(0.3/0.03) - \arctan(0.3/3) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} \right| = 180^\circ - \left| -84^\circ - 6^\circ - 0.3 \times 1 \times 57^\circ \right| = 73^\circ .$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = 10 \frac{e^{-s}}{(1+s/0.03)(1+s/3)} = 10 \frac{e^{-s}}{(1+33s)(1+0.33s)} ,$$

da cui:

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{(1+10s)(1+s)}{(1+33s)(1+0.33s)} ,$$

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 10 \frac{(1+10s)(1+s)}{(1+33s)(1+0.33s)} .$$

## Esempio di progetto per sistemi con disturbo sinusoidale

Per il sistema di controllo di figura:

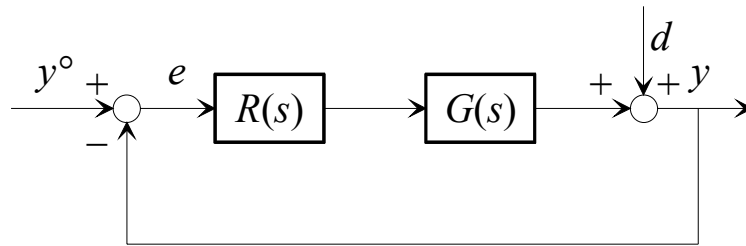


Fig. 14 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1}{1+10s},$$

si vuole progettare il regolatore  $R(s)$  in modo tale che:

- $e_\infty = 0$  per  $y^o(t) = sca(t)$ ;
- un disturbo  $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$ , con  $\bar{\omega} \leq 0.03$ , sia attenuato a regime, sull'uscita  $y$ , di un fattore almeno pari a 10;
- $\omega_c \geq 0.1 \text{ rad/s}$ ;
- $\varphi_m \geq 50^\circ$ .

### Progetto statico

Essendo il sistema sotto controllo di tipo 1, la specifica sull'errore a transitorio esaurito è automaticamente soddisfatta. Poniamo formalmente  $R_1(s) = 1$ .

Per quanto riguarda invece la specifica sull'attenuazione del disturbo, valida anch'essa a transitorio esaurito, utilizzeremo il teorema della risposta in frequenza, nell'ipotesi di poter rendere il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile.

La funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  all'uscita  $y$  risulta:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s).$$

Pertanto, quando  $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$ , a transitorio esaurito si ha:

$$y(t) = |S(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega}t + \angle S(j\bar{\omega})).$$

La specifica sull'attenuazione del disturbo si traduce quindi nella seguente condizione:

$$|S(j\bar{\omega})| < \frac{1}{10}, \quad \forall \bar{\omega} \leq 0.03.$$

D'altra parte sappiamo che:

$$|S(j\bar{\omega})| \approx \frac{1}{|L(j\bar{\omega})|},$$

essendo  $\bar{\omega} \ll \omega_c, \forall \bar{\omega} \leq 0.03$ , ossia  $|L(j\bar{\omega})| \gg 1$ .

Pertanto dovremo semplicemente imporre:

$$|L(j\bar{\omega})| > 10, \quad \forall \bar{\omega} \leq 0.03.$$

### Progetto dinamico

Essendo  $R_1(s) = 1$ , risulta  $L(s) = R_2(s) G(s)$ . La Fig. 16 riporta i diagrammi di Bode del modulo di  $G$  e di  $L$  ottenuta secondo il solito criterio di progetto.

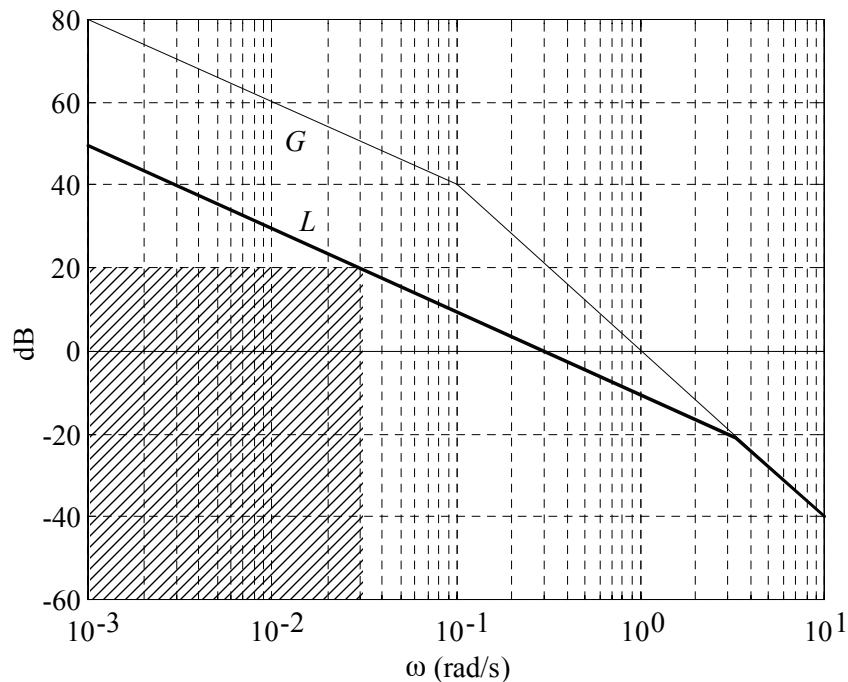


Fig. 15 : Diagrammi di Bode asintotici di  $|G|$  e  $|L|$

Si osservi che il vincolo sull'attenuazione del disturbo sinusoidale si traduce, graficamente, nell'individuazione di una "zona proibita", ossia di un'area nel piano del diagramma del modulo in cui il diagramma di  $|L|$  non può entrare.

Risulta  $\omega_c = 0.3$ , e:

$$\varphi_m \approx 180^\circ - |90^\circ - \arctan(0.3/3)| = 180^\circ - |-90^\circ - 6^\circ| = 84^\circ.$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = \frac{0.3}{s} \frac{1}{1+0.33s}.$$

da cui:

$$R(s) = R_2(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{0.3}{s} \frac{1}{1+0.33s} \frac{s(1+10s)}{10} = 0.03 \frac{1+10s}{1+0.33s}.$$

## Compensazioni

Negli esempi precedenti non si è mai supposto di poter misurare il disturbo. La reazione degli effetti del disturbo sulla variabile controllata era affidata esclusivamente all'anello di controllo, il quale agisce sulla base del manifestarsi di un errore tra segnale di riferimento e variabile controllata. Se tuttavia il disturbo è effettivamente misurabile, è possibile sfruttare l'informazione data dalla misura e agire direttamente sulla variabile di controllo, anticipando l'effetto del disturbo sull'uscita, senza attendere che questo si manifesti in errore.

Si parla di **compensazione diretta** del disturbo quando:

- il disturbo è misurabile
- si esercita un'azione di controllo dipendente dalla sua misura.

Consideriamo dunque un sistema da controllare su cui agisce un disturbo:

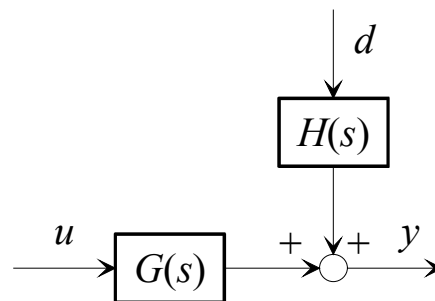


Fig. 16 : Sistema sotto controllo

Uno schema di compensazione potrebbe allora essere il seguente:

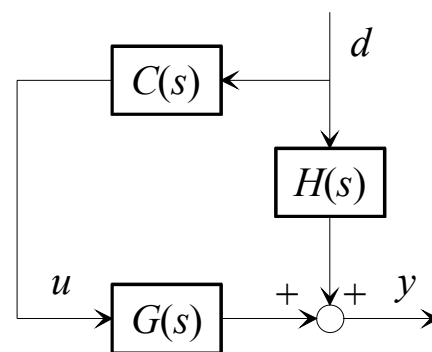


Fig. 17 : Compensazione del disturbo

La funzione di trasferimento  $C(s)$  descrive il comportamento dinamico del **compensatore** e comprende anche l'effetto dinamico del trasduttore del disturbo, qualora esso non risulti trascurabile.

Per il progetto di  $C(s)$  si può imporre che la funzione di trasferimento da  $d$  a  $y$  sia nulla:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s) + C(s)G(s) = 0 ,$$

da cui:

$$C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)}.$$

Spesso il risultato di questa operazione è una funzione di trasferimento non realizzabile o instabile. In tal caso ci si limita a rendere le due funzioni di trasferimento uguali solo approssimativamente. In particolare sono di interesse le seguenti approssimazioni:

- Si approssima il solo guadagno:

$$C(s) = \mu_C = -\frac{H(0)}{G(0)}.$$

in questo modo si annulla a regime l'effetto di un **disturbo costante**

- Si approssima la risposta in frequenza solo ad una determinata pulsazione  $\bar{\omega}$  :

$$C(j\bar{\omega}) = -\frac{H(j\bar{\omega})}{G(j\bar{\omega})}$$

in questo modo, progettando  $C(s)$  asintoticamente stabile, si annulla a regime l'effetto di un **disturbo sinusoidale** alla pulsazione  $\bar{\omega}$ .

Di norma uno schema di compensazione viene associato ad uno schema di **retroazione** per rendere la reiezione del disturbo più robusta rispetto ad incertezze di modello e per soddisfare le altre specifiche. Si perviene allora allo schema di controllo di figura:

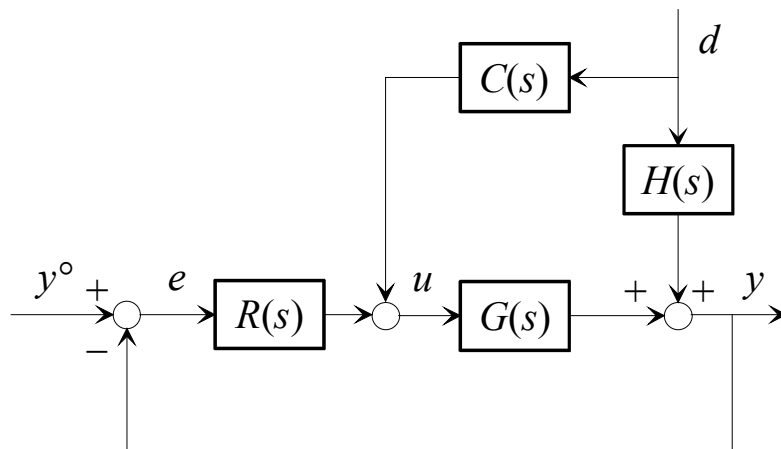
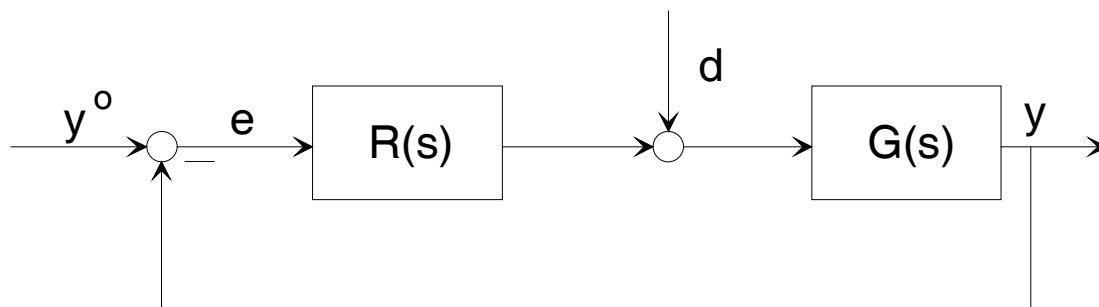


Fig. 18 : Controllo in retroazione con compensazione del disturbo

## Esercizi

### Esercizio 11.1

Con riferimento al seguente sistema di controllo:



in cui:

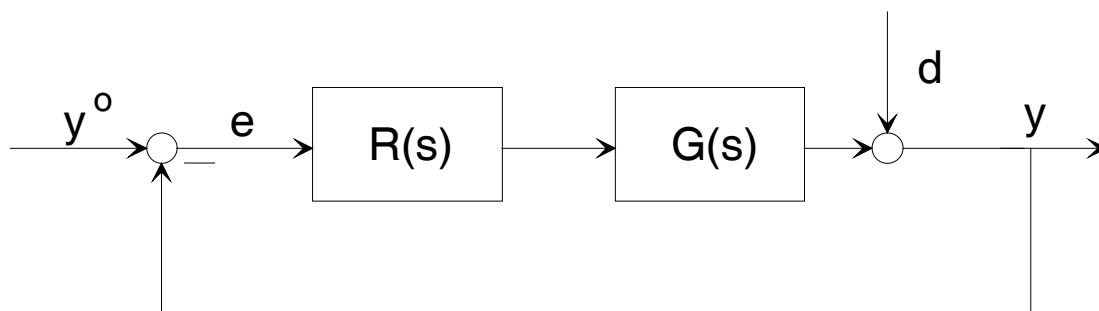
$$G(s) = \frac{1-0.1s}{(1+s)^4}$$

si progetti il regolatore  $R(s)$  in modo tale che:

- $|e_\infty| \leq 0.2$  per  $y^o(t) = 10\text{sca}(t), d(t) = \pm \text{sca}(t)$
- $\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$
- $\phi_m \geq 40^\circ$

### Esercizio 11.2

Con riferimento al seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{1+s}$$

si progetti il regolatore  $R(s)$  in modo tale che:

- $e_\infty = 0$  per  $d(t) = \text{sca}(t)$
- $\omega_c \geq 0.5 \text{ rad/s}$
- $\phi_m \geq 45^\circ$

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 11.1

Sia  $R(s) = R_1(s)R_2(s)$ , con  $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}$ .

#### Progetto statico

E' sufficiente un regolatore di tipo  $g_R = 0$ . Dalle tabelle si ottiene (supponendo il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile)

- errore dovuto a  $y^o$ :  $\left|e_{y^o_\infty}\right| = \frac{10}{1+\mu_R}$
- errore dovuto a  $d$ :  $\left|e_{d_\infty}\right| = \frac{1}{1+\mu_R}$

(si osservi che, agli effetti statici, il disturbo  $d$  si può riportare inalterato in uscita).

Considerando il caso più sfavorevole si avrà:

$$\left|e_\infty\right| = \left|e_{y^o_\infty}\right| + \left|e_{d_\infty}\right| = \frac{11}{1+\mu_R} \leq 0.2 \Rightarrow \mu_R \geq 54 .$$

Scegliamo  $\mu_R = 100$ , ossia  $R_1(s) = 100$ .

#### Progetto dinamico

Posto:

$$L_1(s) = 100G(s) = 100 \frac{1-0.1s}{(1+s)^4}$$

se ne traccia il diagramma di Bode del modulo. Senza ulteriori provvedimenti si otterrebbe margine di fase negativo. Si progetta quindi  $L(s)$  in modo da tagliare a  $\omega_c = 1$  e da raccordarsi in bassa e alta frequenza con la  $L_1$ .

Si ottiene un margine di fase pari a:

$$\phi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 3 \times 12^\circ - 5^\circ| = 180^\circ - 131^\circ = 49^\circ > 40^\circ .$$

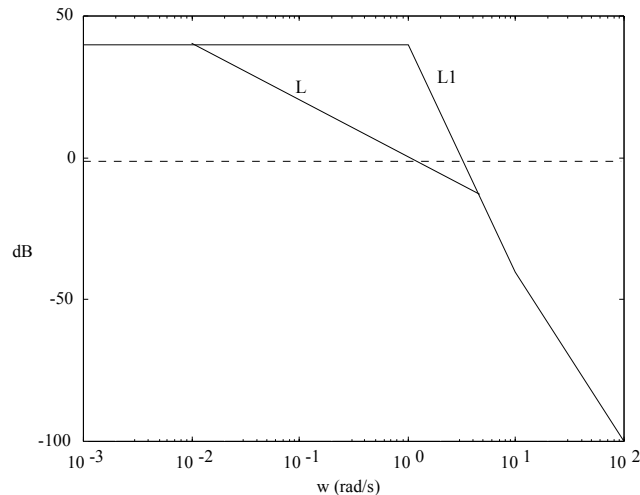
Si osservi che il contributo dello zero nel semipiano destro è modesto in quanto lo zero stesso si trova ad alta frequenza.

Si ricava l'espressione della  $L(s)$ :

$$L(s) = 100 \frac{1-0.1s}{\left(1+\frac{s}{0.01}\right)\left(1+\frac{s}{4.5}\right)^3} = 100 \frac{1-0.1s}{(1+100s)(1+0.22s)^3} ,$$

da cui:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 100 \frac{L(s)}{L_1(s)} = 100 \frac{(1+s)^4}{(1+100s)(1+0.22s)^3} .$$



### Esercizio 11.2

Sia  $R(s) = R_1(s)R_2(s)$ , con  $R_1(s) = \frac{\mu R}{s^{g_R}}$ .

#### Progetto statico

La specifica sull'errore a transitorio esaurito impone la presenza di un integratore nell'anello, e quindi l'adozione di un regolatore di tipo 1:  $g_R = 1$ . Il guadagno del regolatore è arbitrario. Scegliamo quindi:

$$R_1(s) = \frac{1}{s}.$$

#### Progetto dinamico

Posto:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{1}{s} \frac{e^{-s}}{1+s}$$

se ne traccia il diagramma di Bode del modulo. Senza ulteriori provvedimenti si otterrebbe, a causa del ritardo presente nel processo, un sistema instabile in anello chiuso:

$$\phi_c = -90^\circ - 45^\circ - 1 \times 1 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -192^\circ$$

Si progetta quindi  $L(s)$  in modo da tagliare con pendenza  $-1$  a  $\omega_c = 0.5$  e si raccorda il diagramma in alta frequenza con quello di  $L_1$ . Si osservi che non è necessario raccordare i diagrammi in bassa frequenza in quanto il progetto statico non impone vincoli sul guadagno del regolatore.

Si ottiene un margine di fase pari a:

$$\phi_m = 180^\circ - \left| -90^\circ - 13^\circ - 0.5 \times 1 \times \frac{180^\circ}{\pi} \right| = 48^\circ > 45^\circ$$

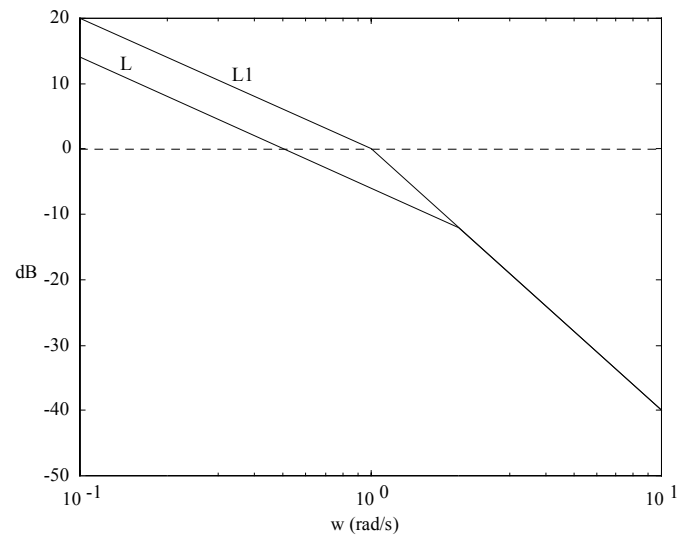
Si ricava l'espressione della  $L(s)$ :



$$L(s) = \frac{0.5}{s} \frac{1+s}{1+\frac{s}{2}} e^{-s} = \frac{0.5}{s} \frac{1+s}{1+0.5s} e^{-s},$$

da cui:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{1}{s} \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{0.5}{s} \frac{1+s}{1+0.5s}.$$



## *Lezione 12*

# Regolatori PID

## Legge di controllo PID

Consideriamo un regolatore che esercita un'azione di controllo dipendente dall'errore attraverso la seguente legge:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}.$$

La legge di controllo è quindi composta da:

- un'azione **Proporzionale** all'errore;
- un'azione **Integrale** sull'errore;
- un'azione **Derivativa** sull'errore.

Questo tipo di regolatori prende quindi il nome di **PID**. I tre guadagni che compaiono nella legge di controllo vengono chiamati:

$K_P$  : guadagno proporzionale;

$K_I$  : guadagno integrale;

$K_D$  : guadagno derivativo.

Alternativamente, la legge di controllo si può scrivere come segue:

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right],$$

dove:

$$T_I = \frac{K_P}{K_I} : \text{tempo integrale}$$

$$T_D = \frac{K_D}{K_P} : \text{tempo derivativo}$$

---

Tra le ragioni del vastissimo utilizzo dei regolatori PID nella pratica dell'automazione industriale (i PID sono anche detti **regolatori industriali**), ricordiamo:

- *semplicità di realizzazione* in diverse tecnologie (elettronica, idraulica, pneumatica);
- *efficacia* per la regolazione di un'ampia gamma di processi industriali;
- *standardizzazione* con i relativi vantaggi in termini di *affidabilità* e *economicità*;
- *semplicità di taratura* dei parametri;
- possibilità di *taratura automatica* dei parametri, per mezzo di semplici esperimenti.

Dal caso generale della legge di controllo PID è poi possibile derivare altre leggi di controllo, annullando una o più delle azioni di controllo. Sono in particolare di interesse le leggi di controllo:

**P** (proporzionale);

**PD** (proporzionale-derivativa);

**PI** (proporzionale-integrale).

Essendo un sistema dinamico lineare e invariante, il regolatore PID può essere rappresentato da una funzione di trasferimento:

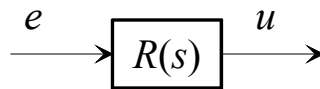


Fig. 1 : Funzione di trasferimento del regolatore PID

$$R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} + sT_D \right) = \frac{K_P}{T_I} \frac{1 + sT_I + s^2 T_I T_D}{s}$$

Il numeratore di  $R(s)$  è di grado superiore al denominatore: pertanto, così come scritta, la funzione di trasferimento non è fisicamente realizzabile. Ciò corrisponde all'impossibilità di ottenere dall'errore un segnale che ne costituisca in ogni istante la derivata. Per rendere realizzabile l'azione derivativa occorrerà in effetti aggiungere un polo in alta frequenza, per altro di norma irrilevante ai fini della valutazione delle prestazioni del regolatore PID.

Dall'ultima espressione scritta per  $R(s)$  si riconosce che al variare di  $T_I$  e  $T_D$  gli zeri del regolatore possono essere reali o complessi e coniugati. Imponendo la presenza di due zeri reali e distinti, naturalmente nel semipiano sinistro, il diagramma di Bode del modulo di  $R$  assumerà l'andamento tipico riportato in figura:

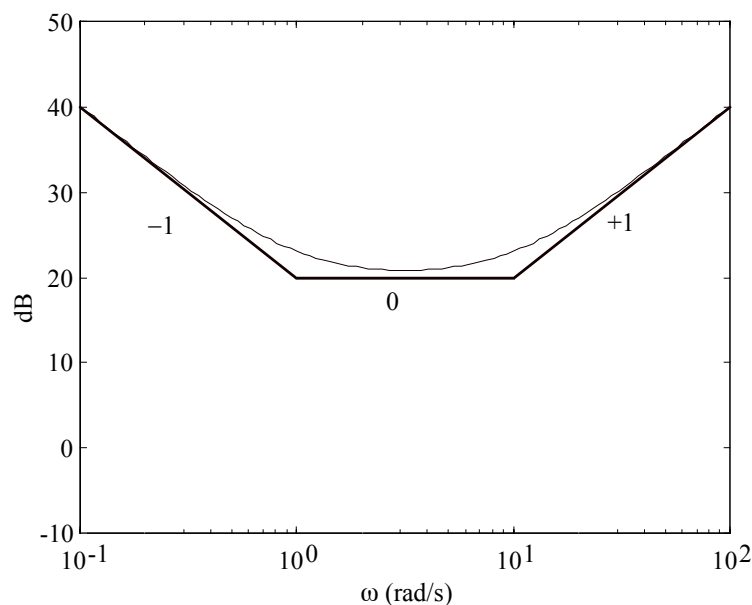


Fig. 2 : Tipico andamento del diagramma di  $|R|$

Il progetto del regolatore PID si riduce quindi alla scelta del guadagno e della posizione degli zeri.

## Taratura analitica dei regolatori PID

Come tutti i controllori, anche il controllore PID può essere progettato sulla base delle tecniche analitiche viste in precedenza, che fanno uso del modello matematico del sistema sotto controllo scritto in forma di funzione di trasferimento. Tuttavia, nel caso del controllore PID, i gradi di libertà nel progetto sono limitati a 3 (il guadagno e due zeri): è allora opportuno procedere in modo più diretto rispetto alla sintesi per tentativi della funzione di trasferimento d'anello già illustrata, selezionando direttamente la posizione degli zeri (tipicamente in modo da cancellare i poli del processo) e scegliendo il guadagno in modo da soddisfare le specifiche dinamiche.

### Esempio

Si consideri lo schema di controllo in figura:

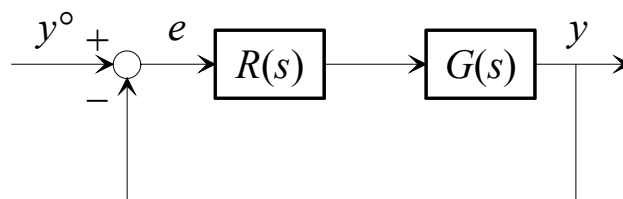


Fig. 3 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = 0.1 \frac{e^{-3s}}{(1+5s)(1+20s)}$$

Si vuole progettare il regolatore  $R(s)$  nella classe dei regolatori PID in modo tale che:

- $e_{\infty} = 0$  per  $y^o(t) = sca(t)$ ;
- $\varphi_m \geq 40^\circ$
- $\omega_c$  sia la massima possibile.

La specifica statica impone un regolatore di tipo 1, ossia la presenza dell'azione integrale nel regolatore PID. Scritta la funzione di trasferimento come

$$R(s) = \mu_R \frac{(1+sT_1)(1+sT_2)}{s}$$

dove  $\mu_R > 0$  è il guadagno,  $T_1$  e  $T_2$  sono le costanti di tempo degli zeri e si è sottintesa la presenza di un polo in alta frequenza introdotto per rendere realizzabile l'azione derivativa, potremo porre:

$$T_1 = 5, T_2 = 20,$$

in modo da cancellare con gli zeri del regolatore i poli del processo.

Si ottiene quindi la funzione di trasferimento d'anello:

$$L(s) = R(s)G(s) = \frac{0.1\mu_R}{s} e^{-3s}.$$

Come è noto, il diagramma di Bode del modulo associato a  $L$  ha pendenza  $-1$  su tutto l'asse delle pulsazioni, e taglia l'asse in corrispondenza della seguente pulsazione:

$$\omega_c = 0.1\mu_R.$$

La fase critica risulta quindi:

$$\varphi_c = -90^\circ - \omega_c \times \tau \times \frac{180^\circ}{\pi} = -90^\circ - 0.3\mu_R \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Imponiamo il vincolo sul margine di fase:

$$\varphi_m = 90^\circ - 0.3\mu_R \frac{180^\circ}{\pi} \geq 40^\circ \Rightarrow \mu_R \leq \frac{50\pi}{0.3 \times 180^\circ} = 2.91.$$

Scegliendo  $\mu_R = 2.9$  si ottiene il regolatore:

$$R(s) = 2.9 \frac{(1+5s)(1+20s)}{s} = 2.9 \frac{100s^2 + 25s + 1}{s} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s,$$

con

$$K_P = 72.5, K_I = 2.9, K_D = 290.$$

Questo regolatore conferisce al sistema di controllo un margine di fase di circa  $40^\circ$  ed una pulsazione critica di  $0.29$  rad/s.

## Taratura automatica dei regolatori PID

Uno dei vantaggi connessi all'utilizzo dei regolatori PID consiste nella possibilità di effettuare la taratura dei parametri sulla base di semplici prove sperimentali, prescindendo dalla formulazione matematica, non sempre agevole, del sistema sotto controllo.

Tra i numerosi **metodi empirici** per la sintonizzazione dei regolatori PID, ci limitiamo ad accennare ai due tradizionalmente più noti.

### *Metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso*

Il metodo si articola nei seguenti passi:

1. Si chiude l'anello di controllo con il regolatore PID (i cui parametri devono essere sintonizzati), imponendo nulle le azioni integrale e derivativa:  $K_I = 0$ ,  $K_D = 0$ .

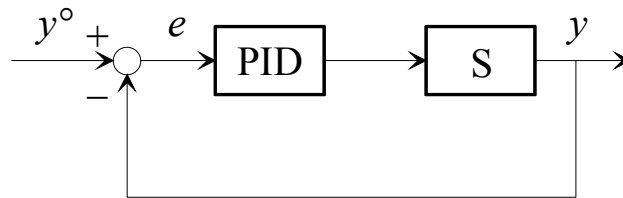


Fig.4 : Sistema in anello chiuso con regolatore PID

2. Partendo da valori molto piccoli di  $K_P$  si effettua un semplice esperimento, consistente nell'applicare un piccolo gradino al segnale di riferimento.
3. Si aumenta progressivamente  $K_P$  ripetendo di volta in volta l'esperimento finché non si instaura nell'anello un'**oscillazione permanente**.

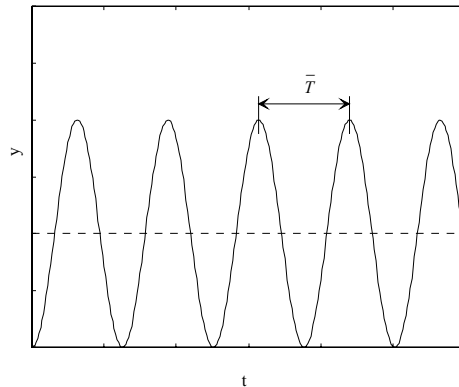


Fig.5 : Oscillazione permanente

4. Detto  $\bar{K}_P$  il valore del guadagno proporzionale corrispondente all'oscillazione permanente (*guadagno critico*) e  $\bar{T}$  il periodo di tale oscillazione, si tarano i parametri di un regolatore **P**, **PI** o **PID** sulla base della seguente tabella:

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>P</b>	$0.5 \bar{K}_P$	-	-
<b>PI</b>	$0.45 \bar{K}_P$	$\frac{\bar{T}}{1.2}$	-
<b>PID</b>	$0.6 \bar{K}_P$	$\frac{\bar{T}}{2}$	$\frac{\bar{T}}{8}$

Il metodo non è sempre applicabile: ci sono infatti sistemi che non generano oscillazioni, anche con guadagni proporzionali elevati. Altre volte può essere pericoloso, o comunque sconsigliabile, portare il sistema al limite di stabilità.

### **Metodo di Ziegler e Nichols in anello aperto**

Il metodo si articola nei seguenti passi:

1. Si applica una variazione a scalino all'ingresso del sistema sotto controllo.

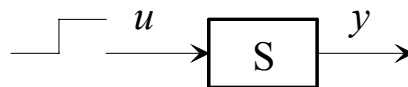


Fig.6 : Perturbazione a scalino

2. Si traccia la tangente alla risposta nel **punto di flesso**:

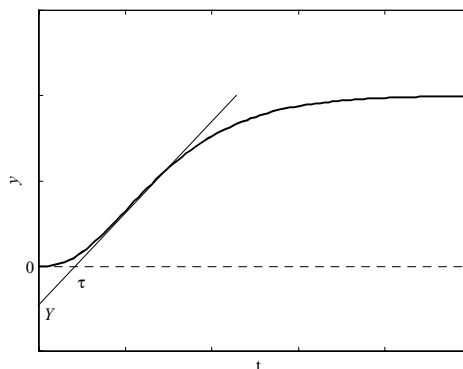


Fig.7 : Metodo della tangente nel punto di flesso

3. Si individuano graficamente le intercette  $\tau$  e  $Y$  della tangente sugli assi  $t$  e  $y$ , rispettivamente.
4. Si tarano i parametri di un regolatore **P**, **PI** o **PID** sulla base della seguente tabella:



	$K_P$	$T_I$	$T_D$
<b>P</b>	$\frac{1}{Y}$	–	–
<b>PI</b>	$\frac{0.9}{Y}$	$3\tau$	–
<b>PID</b>	$\frac{1.2}{Y}$	$2\tau$	$0.5\tau$

Il metodo non è ovviamente applicabile se la risposta allo scalino non presenta flesso o se la risposta presenta oscillazioni. Inoltre non sempre è possibile operare sul processo in anello aperto, o perturbare bruscamente il suo ingresso.

## Esercizi

### Esercizio 12.1

Si scriva la legge di controllo nel dominio del tempo del regolatore PID descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$R(s) = \mu \frac{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}{s}$$

con:

$$\mu = 5, T_1 = 2, T_2 = 3.$$

### Esercizio 12.2

Si supponga di dover sintonizzare un regolatore PID per il controllo di un processo descritto dalla funzione di trasferimento (non nota):

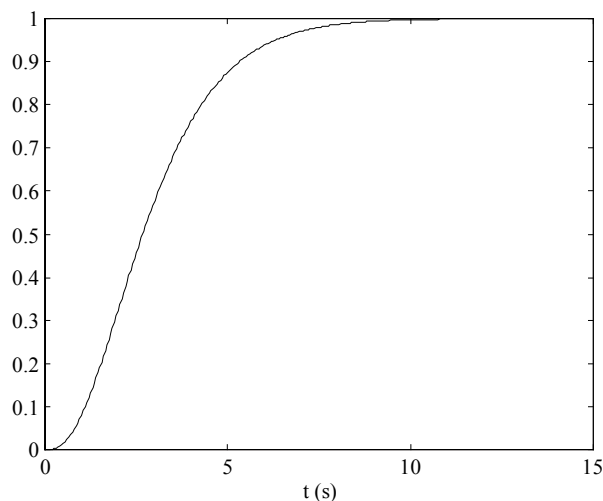
$$G(s) = \frac{1}{(1+s)^3}.$$

Si determini a quale taratura dei parametri condurrebbero le regole di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

Successivamente, si tracci il diagramma di Bode della funzione di trasferimento d'anello risultante dall'applicazione del regolatore PID al processo.

### Esercizio 12.3

A partire dalla risposta allo scalino in anello aperto di un processo, riportata in figura, si tarino i parametri di un regolatore PID utilizzando le regole di Ziegler e Nichols in anello aperto.



Successivamente, sapendo che la funzione di trasferimento del processo è la stessa dell'esercizio precedente, si tracci il diagramma di Bode della funzione di trasferimento d'anello risultante dall'applicazione del regolatore PID al processo.

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 12.1

Si ha:

$$R(s) = 5 \frac{(1+2s)(1+3s)}{s} = \frac{5}{s} + 25 + 30s$$

da cui  $K_I = 5$ ,  $K_P = 25$ ,  $K_D = 30$ . La legge di controllo nel dominio del tempo è quindi data da:

$$u(t) = 25e(t) + 5 \int_0^t e(\tau) d\tau + 30 \frac{de(t)}{dt}.$$

### Esercizio 12.2

Si tratta di individuare il valore  $\bar{K}_P$  che rende nullo il margine di fase del sistema di controllo avente funzione di trasferimento d'anello  $L(s) = \bar{K}_P G(s)$ . Il periodo dell'oscillazione si ottiene poi come  $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}_c$ , essendo  $\bar{\omega}_c$  la pulsazione critica in questa condizione particolare.

Il problema si può facilmente risolvere determinando, ad esempio con il regolo delle fasi, il valore della pulsazione critica tale che ciascuno dei tre poli di  $G$  (coincidenti alla pulsazione 1 rad/s) dia un contributo di fase di  $-60^\circ$ , in modo che la fase critica valga  $-180^\circ$ . Si ottiene  $\bar{\omega}_c = 1.7$ , e quindi  $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}_c = 3.7s$ . Il guadagno proporzionale critico si ricava valutando di quanto va traslato in alto il diagramma di Bode del modulo di  $G$  per farlo tagliare alla pulsazione  $\bar{\omega}_c$ . Si ottiene  $\bar{K}_P \approx 15dB$ , ossia  $\bar{K}_P \approx 5.6$ . Si osservi che il calcolo di  $\bar{K}_P$  equivale alla determinazione del margine di guadagno associato a  $G$ .

Dalle tabelle si ricava:

$$K_P = 0.6\bar{K}_P = 3.36, \quad T_I = \bar{T}/2 = 1.85, \quad T_D = \bar{T}/8 = 0.46.$$

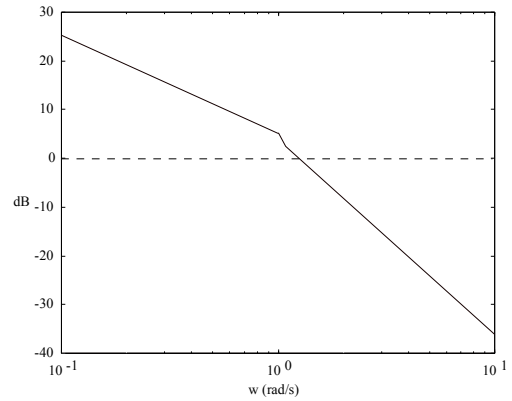
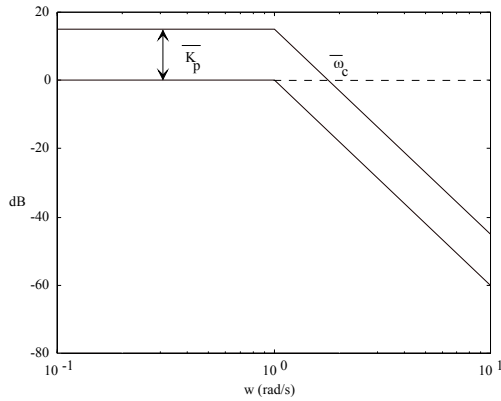
La funzione di trasferimento del PID è quindi (trascurando il polo ad alta frequenza del derivatore):

$$R(s) = K_P \frac{1 + sT_I + s^2 T_I T_D}{sT_I} = 0.6\bar{K}_P \frac{1 + s\bar{T}/2 + s^2 (\bar{T}/2)(\bar{T}/8)}{s(\bar{T}/2)} = 1.2 \frac{\bar{K}_P}{\bar{T}} \frac{(1 + s(\bar{T}/4))^2}{s} = 1.82 \frac{(1 + 0.925s)^2}{s}$$

La funzione d'anello risultante:

$$L(s) = 1.82 \frac{(1 + 0.925s)^2}{s(1+s)^3}$$

ha il diagramma di Bode riportato in figura.



### Esercizio 12.3

Occorre tracciare la tangente nel punto di flesso alla risposta allo scalino ed individuare le intercette con gli assi. Graficamente si ottiene  $Y = 0.21$ ,  $\tau = 0.81$ . Dalle tabelle si ricava:

$$K_P = 1.2/Y = 5.71, \quad T_I = 2\tau = 1.62, \quad T_D = 0.5\tau = 0.40$$

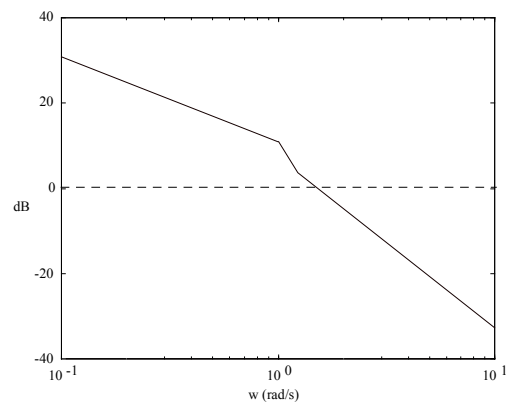
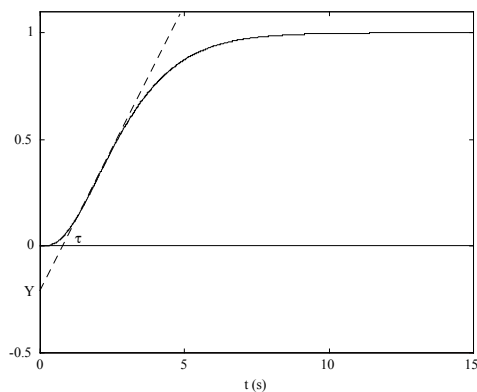
La funzione di trasferimento del PID è quindi (trascurando il polo ad alta frequenza del derivatore):

$$R(s) = K_P \frac{1 + sT_I + s^2T_D}{sT_I} = \frac{1.2}{Y} \frac{1 + 2\tau s + \tau^2 s^2}{2\tau s} = \frac{0.6}{\tau Y} \frac{(1 + \tau s)^2}{s} = 3.53 \frac{(1 + 0.81s)^2}{s}$$

La funzione d'anello risultante:

$$L(s) = 3.53 \frac{(1 + 0.81s)^2}{s(1 + s)^3}$$

ha il diagramma di Bode riportato in figura.



## *Lezione 13*

# Elementi di controllo digitale

## Realizzazione dei regolatori

Il progetto del regolatore come è stato impostato nelle precedenti lezioni si conclude con la determinazione della funzione di trasferimento  $R(s)$  del regolatore stesso. Tuttavia la funzione di trasferimento costituisce soltanto un formalismo matematico per descrivere il comportamento dinamico di un sistema, a partire dal quale occorre **realizzare** un dispositivo avente quel comportamento dinamico, ed atto alla regolazione del processo sotto controllo.

Il modo più naturale di procedere sembra quello di realizzare, in una qualunque tecnologia (elettronica, pneumatica, fluidica) un sistema che presenti la stessa funzione di trasferimento ottenuta dal progetto, ed interfacciarlo con il trasduttore della misura della variabile controllata, da un lato, e con l'attuatore, dall'altro. Questo è il principio che sta alla base dei **sistemi di controllo analogici**.

Tuttavia, negli ultimi decenni, l'avvento ed il successivo impetuoso sviluppo delle tecnologie digitali hanno indotto i progettisti dei sistemi di controllo ad un crescente interesse verso l'utilizzo dei calcolatori, in particolare dei microprocessori, all'interno dell'anello di controllo. I **sistemi di controllo digitale**, dopo le iniziali difficoltà legate principalmente alla, giustificata, riluttanza del mondo industriale ad abbandonare soluzioni tecnologicamente assestate a favore di altre basate su tecnologie emergenti, hanno via via soppiantato i sistemi di controllo analogici, che oggi sopravvivono soprattutto in applicazioni in cui le bande richieste agli anelli di controllo renderebbero antieconomico il passaggio alla tecnologia digitale (esempi si hanno nel campo del controllo dei motori elettrici).

## Inserimento del calcolatore in un anello di controllo

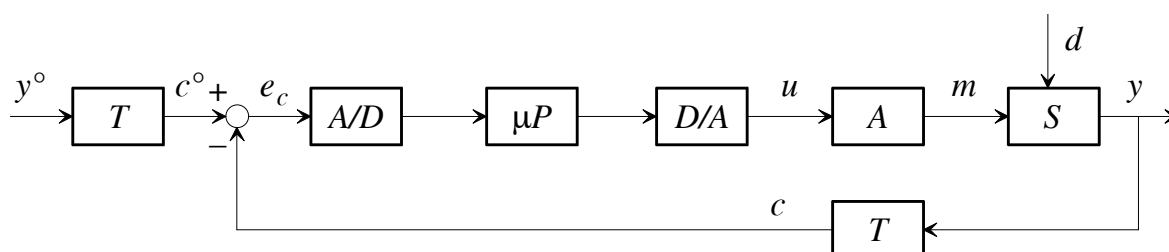
Un calcolatore opera, in istanti di tempo discreti, su variabili rappresentate da numeri con precisione finita (dipendente dal numero di bit), ossia su cosiddetti **segnali digitali**. Le variabili di ingresso ed uscita del sistema sotto controllo sono invece funzioni del tempo (continuo), sono cioè cosiddetti **segnali analogici**. Sono segnali analogici anche le misure delle grandezze fornite dai trasduttori, come pure i segnali di comando degli attuatori. L'inserimento del calcolatore nell'anello di controllo comporta allora l'adozione di dispositivi per la conversione dei segnali analogici in segnali digitali e viceversa.

Tali dispositivi prendono il nome, rispettivamente, di:

**convertitori A/D (analogico/digitale)**

**convertitori D/A (digitale/analogico).**

Uno schema di massima di un sistema di controllo digitale sarà quindi il seguente (dove  $\mu P$  indica il microprocessore):



*Fig. 1 : Sistema di controllo digitale*

## Conversione A/D: il campionamento

Si consideri un generico segnale analogico  $v(t)$ ,  $t \in \mathfrak{R}$ . Si fissi un'origine per l'asse dei tempi e, a partire da tale istante ( $t=0$ ), si considerino istanti di tempo distanti l'uno dall'altro per un intervallo  $T_C$ . Si valuti quindi il segnale  $v(t)$  in corrispondenza di tutti questi istanti:

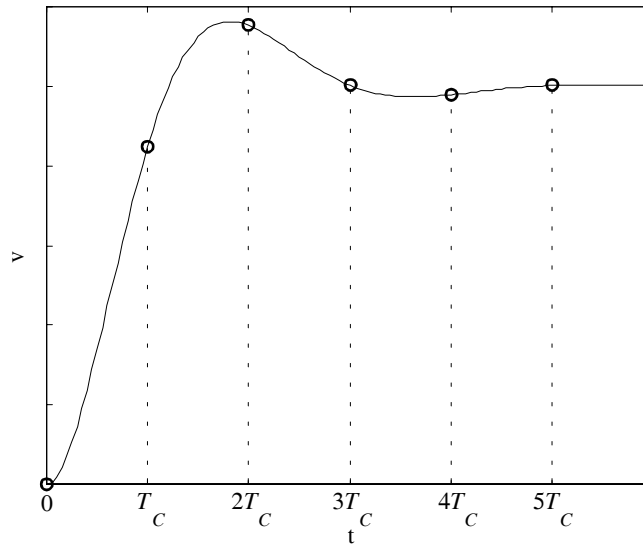


Fig. 2 : Campionamento

Si otterrà una sequenza (o successione) di numeri che indichiamo con:

$$v^*(k) = v(kT_C), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

La sequenza di numeri  $v^*(k)$  si chiama **segnale campionato**.

L'operazione compiuta prende il nome di **campionamento** del segnale continuo  $v$ .

L'intervallo di tempo  $T_C$  si dice **periodo** (o **tempo**, o **intervallo**) di campionamento.

L'inverso del periodo di campionamento,  $f_C = 1/T_C$  si chiama **frequenza di campionamento**.

La pulsazione corrispondente  $\Omega_C = 2\pi/T_C$  si chiama **pulsazione di campionamento**, mentre la pulsazione  $\Omega_N = \Omega_C/2 = \pi/T_C$  prende il nome di **pulsazione di Nyquist**.

Nella conversione analogico/digitale è anche inevitabile una *quantizzazione* del segnale, cioè la suddivisione dell'insieme dei valori che può assumere il segnale in un numero finito di intervalli, ciascuno associato ad un numero espresso in bit. Nel seguito non ci occuperemo degli effetti della quantizzazione, ritenendo l'insieme in cui varia  $v^*$  identico a quello in cui prende valori  $v$ .

Si intuisce che all'operazione di campionamento è generalmente associata una perdita di informazione, rispetto al segnale originario analogico. Non sembra infatti possibile compiere l'operazione inversa, ossia risalire univocamente dal segnale campionato al segnale originario, dal momento che diversi segnali analogici, anche molto differenti tra loro, possono dar luogo allo stesso segnale campionato:



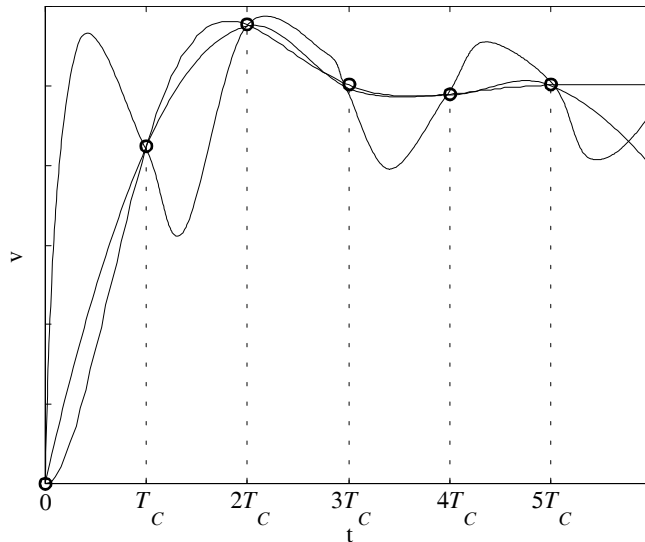


Fig. 3 : Segnali analogici che danno luogo allo stesso segnale campionato

In particolare, campionando un segnale sinusoidale con determinati periodi di campionamento, si può ottenere un segnale campionato che esibisce una oscillazione di lungo periodo, del tutto assente nel segnale originario:

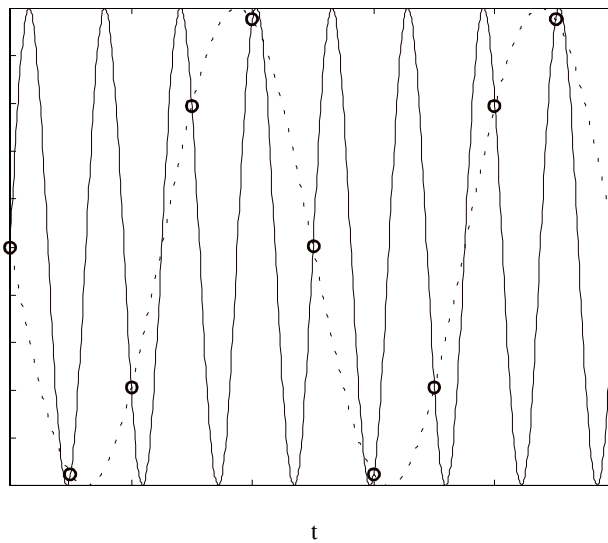


Fig. 4 : Aliasing

Questo fenomeno, detto **aliasing**, impone che il periodo di campionamento sia adeguato alle caratteristiche del segnale soggetto al campionamento. Il campionamento deve essere sufficientemente fitto (e quindi il periodo di campionamento sufficientemente piccolo) da cogliere anche le variazioni più rapide del segnale.

E' abbastanza evidente che per campionare correttamente un segnale sinusoidale occorrono almeno due campioni per periodo. Detto  $\bar{T}$  il periodo della sinusoide si avrà quindi:

$$\bar{T} > 2T_C \Rightarrow 2\pi/\bar{T} < \pi/T_C,$$

ossia, detta  $\bar{\omega} = 2\pi/\bar{T}$  la pulsazione della sinusoide:

$$\bar{\omega} < \Omega_N.$$

Se ora si ricorda che un generico segnale a tempo continuo si può scomporre in serie o integrale (a seconda che sia periodico o aperiodico) di infinite sinusoidi (componenti armoniche), si perviene al seguente risultato:

**Teorema di Shannon (o del campionamento)**

Se il segnale soggetto a campionamento  $v(t)$  non ha componenti armoniche a pulsazioni superiori alla pulsazione di Nyquist  $\Omega_N = \pi/T_c$  (segnale a **banda limitata**), allora la conoscenza del segnale campionato  $v^*(k)$ , con periodo di campionamento  $T_c$ , consente di ricostruire esattamente il segnale originario  $v(t)$ , ossia segnale campionato e segnale soggetto al campionamento sono informativamente equivalenti.

Se è rispettata la condizione del teorema del campionamento, deve essere possibile ricostruire, a partire dalla sequenza completa dei campioni del segnale campionato  $v^*(k)$ , il segnale originario  $v(t)$  ad ogni istante. La formula che risolve il problema è la **formula di Shannon**:

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ v^*(k) \frac{\sin(\Omega_N t - k\pi)}{\Omega_N t - k\pi} \right].$$

Scelto il periodo di campionamento del convertitore A/D, è anche possibile forzare il segnale di ingresso al soddisfacimento della condizione del teorema del campionamento, filtrando il segnale stesso con un filtro passabasso. Tale filtro, che va sotto il nome di **filtro anti-aliasing**, avrà pulsazione di taglio inferiore alla pulsazione di Nyquist, in modo da tagliare le componenti ad alta frequenza del segnale.

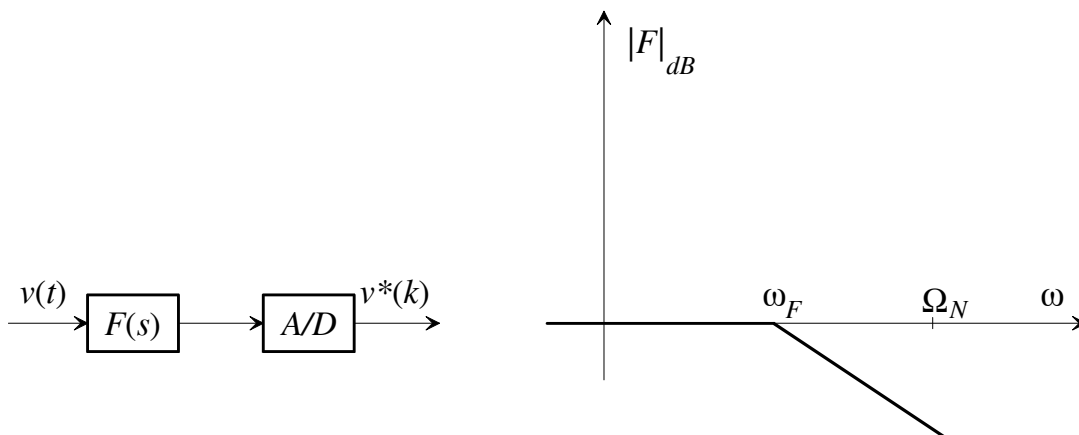


Fig. 5 : Filtro anti-aliasing

## Conversione D/A

La conversione digitale/analogico consiste nel ricavare da una sequenza di valori  $v^*(k)$  cui è associata una base dei tempi, un segnale a tempo continuo, che negli istanti associati ai valori  $v^*(k)$ , assuma gli stessi valori della sequenza data.

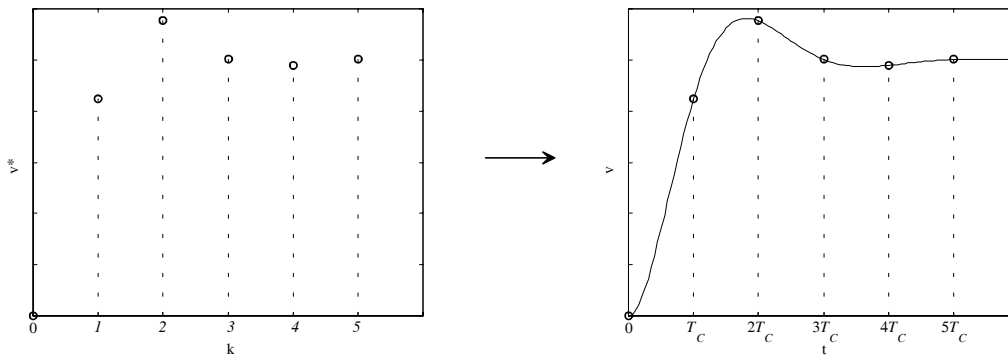


Fig. 6 : Conversione D/A

La formula di Shannon risolverebbe il problema generando un segnale a banda limitata: tuttavia non è utilizzabile negli schemi di controllo digitale in quanto **non causale**. Il valore di  $v(t)$ , a ciascun istante di tempo, dipende infatti da tutti i valori di  $v^*(k)$ , in particolare anche da quelli associati ad istanti successivi a  $t$ . Il calcolatore impiegato nel controllo digitale, operando in tempo reale, non può disporre che dei valori passati della variabile di controllo da convertire. Per risolvere il problema si usano allora degli **estrapolatori**, ossia dei dispositivi che sulla base di un certo numero di campioni (i più recenti elaborati dal dispositivo di controllo digitale), determinano il valore che dovrà assumere l'uscita del convertitore fino al successivo campione.

In particolare la soluzione più comunemente utilizzata consiste semplicemente nel mantenere costante l'ultimo campione in tutto l'intervallo di campionamento:

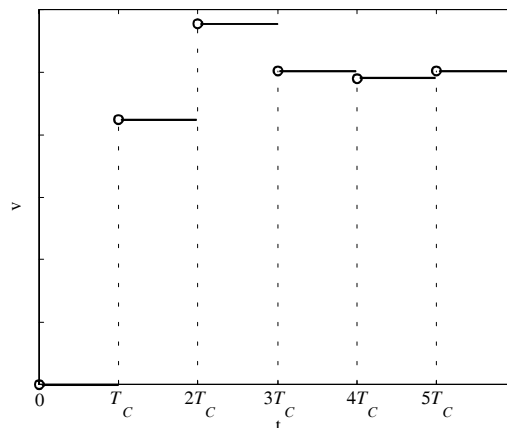


Fig. 7 : Mantenitore di ordine zero

Il dispositivo che realizza questa operazione si chiama **Mantenitore di ordine zero** o **ZOH** (**Z**ero **O**rdine **H**old). Si osservi che l'operazione introduce un certo ritardo del segnale a tempo continuo ottenuto, rispetto a quello ottenibile via decampionatore di Shannon. Tale ritardo è quantificabile in circa metà del periodo di campionamento.

## Scelta del periodo di campionamento

Per quanto detto finora, un sistema di controllo digitale può essere schematizzato come segue:

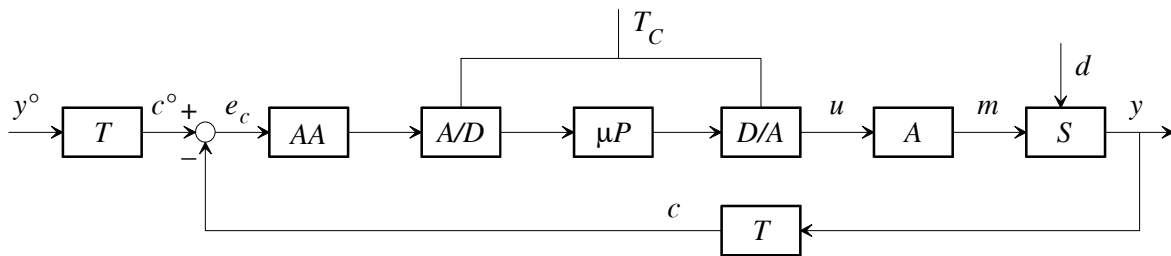


Fig. 8 : Sistema di controllo digitale

Nello schema si è evidenziato che i convertitori A/D e D/A operano con lo stesso passo di campionamento e in modo sincrono (con la stessa origine dell'asse dei tempi). Inoltre si è messo in evidenza un eventuale filtro antialiasing (AA) da porre a monte del convertitore A/D.

Ci si pone ora il problema della **scelta del periodo di campionamento**. E' noto che in un sistema di controllo le componenti armoniche significative dei segnali risiedono nella banda passante del sistema di controllo, il cui estremo superiore è di norma ben approssimato dalla pulsazione critica  $\omega_c$ . Per rispettare la condizione del teorema di Shannon occorrerà allora che la pulsazione critica sia decisamente inferiore alla pulsazione di Nyquist:

$$\omega_c \ll \Omega_N.$$

Un buon criterio è che le due pulsazioni siano separate da una decade ( $\Omega_N / \omega_c = 10$ ).

In presenza di disturbi con componenti armoniche di alta frequenza o di componenti in alta frequenza del segnale di riferimento (che non interessa riprodurre in uscita) è opportuno anteporre al convertitore A/D un **filtro antialiasing**. La pulsazione di taglio del filtro dovrà essere superiore a  $\omega_c$  (per non tagliare componenti armoniche significative del segnale da campionare) ma inferiore a  $\Omega_N$  (per rispettare la condizione del teorema del campionamento):

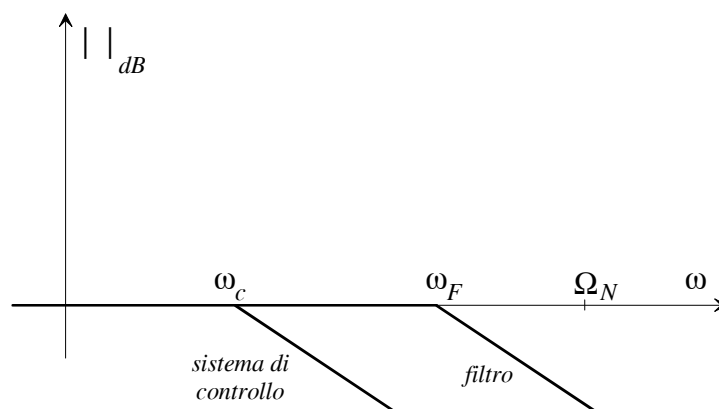
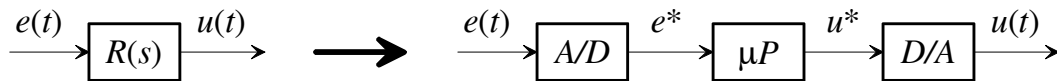


Fig. 9 : Filtro antialiasing

Si osservi che in fase di progetto del regolatore  $R(s)$  occorrerà prevedere un'eccedenza di margine di fase necessaria a coprire lo sfasamento indotto dall'eventuale filtro antialiasing e dal ritardo introdotto dall'operazione di mantenimento (ZOH).

## Discretizzazione della legge di controllo

Il calcolatore nel sistema di controllo digitale riceve i campioni dell'errore tra riferimento e variabile controllata e deve produrre i campioni della variabile di controllo, da passare al convertitore D/A (ZOH). Nel compiere questa operazione, il calcolatore deve fare in modo che il legame dinamico esistente tra il segnale errore e la variabile di controllo sia quanto più possibile simile a quello determinato dalla funzione di trasferimento  $R(s)$  a tempo continuo progettata per il regolatore:



*Fig. 10 : Discretizzazione della legge di controllo*

Si risolve il problema ricordando che la funzione di trasferimento non è altro che un formalismo comodo per rappresentare un sistema di equazioni differenziali lineari:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) + b_1e(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \dots + a_{2n}x_n(t) + b_2e(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) + b_n e(t) \end{cases}$$

$$u(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) + de(t)$$

A questo punto, il sistema viene discretizzato con una delle formule note dal calcolo numerico. Le equazioni risultanti sono immediatamente traducibili in un programma di calcolo, codificabile in un qualunque linguaggio di programmazione. Si osservi la flessibilità dell'operazione: cambiamenti nei parametri del regolatore si traducono in cambiamenti di dati del programma (inseribili anche da tastiera), mentre cambiamenti nella legge di controllo si operano semplicemente modificando (e ricompilando) il programma.

Consideriamo per esempio un regolatore PI:

$$R(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$$

Una realizzazione in variabili di stato del regolatore è la seguente:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = e(t) \\ u(t) = K_I x(t) + K_P e(t) \end{cases}$$

Adottando la formula di discretizzazione dei trapezi (nota come formula di **Tustin** nell'ambito dei controlli automatici), otteniamo:

$$\begin{aligned} x^*(k) &= x^*(k-1) + \frac{T_C}{2} (e^*(k) + e^*(k-1)) \\ u^*(k) &= K_I x^*(k) + K_P e^*(k) \end{aligned}$$

dove  $e^*(k) = e(kT_C)$ ,  $u^*(k) = u(kT_C)$ .

Le equazioni discretizzate sono traducibili nel seguente programma, da eseguire ad ogni

istante di campionamento:

```
input yref, y
e := yref-y
state := state + Tc/2*(e+eold)
u := KI*state + KP*e
eold := e
```