

# **RELAZIONE SUL CONTROLLO OTTIMO DI AMMORTIZZATORE SEMI-ATTIVO**

A cura di

Andrea Bareggi

matr.634344

## Indice

Introduzione	pag. 3
Qualche nota sui sistemi di ammortizzazione	pag. 4
Gli obiettivi dell'ottimizzazione	pag. 5
Cenni sull'ammortizzazione semi-attiva con fluido elettroreologico	pag. 6
Introduzione ai sistemi di controllo	pag. 9
Modello dinamico del veicolo	pag. 9
Il progetto del controllo ottimo	pag. 13
Conventional Method (CM)	pag. 13
Acceleration Dependent Method (ADM)	pag. 14
Determinazione delle funzioni peso Q ed R	pag. 15
La superficie stradale	pag. 15
Risultati della simulazione	pag. 17
Conclusioni	pag. 20
Bibliografia	pag. 21

## Introduzione

Questa relazione tratta di problemi di controllo per gli ammortizzatori attivi. Con tale studio ci si propone di enfatizzare la metodologia di progetto di un sistema di controllo quando si deve rispettare una determinata specifica, tenendo conto delle restrizioni tecnologiche degli attuatori. E' questo infatti lo spirito del controllo ottimo. Quando si trattano problemi di ammortizzazione ci si riferisce principalmente a tre tipi di modelli: il *quarter car* che sviluppa le equazioni di moto in una sola direzione (la verticale), l'*half car*, a cui si aggiunge una rotazione (il beccheggio) e il *full car*, con traslazione verticale, rollio e beccheggio. In questa relazione verrà utilizzato l'*half car*, che rappresenta lo stato di studio intermedio del moto di un autoveicolo, comunque sufficiente per il tipo di studio che si intende affrontare. La formulazione matematica terrà conto degli obiettivi di sicurezza e comfort per il generico veicolo da strada. Negli esempi numerici sono stati utilizzati i dati relativi ad un autoveicolo di media stazza e alle informazioni sui più usati asfalti estratte dalle certificazioni ISO. Nella relazione sono stati analizzati due differenti approcci, conosciuti in letteratura come *Conventional Method* (CM) che non tiene conto nel funzionale di ottimizzazione  $J$  delle accelerazioni dei passeggeri (2 nel modello *quarter car*) e uno che invece ne tiene conto, l'*Acceleration Dependent Method* (ADM). L'introduzione del corpo umano nei modelli è ancora in fase di studio e in questa relazione i 2 passeggeri verranno rappresentati con 2 semplici sistemi massa-molla-smorzatore, che nonostante la semplicità è sufficiente a fornire almeno una stima approssimativa della dinamica che occorre aggiungere nell'ADM rispetto al CM. Già nel caso si studi un modello *full car* questo semplice modello risulta insufficiente. In caso si analizzino situazioni di dinamica veloce (quali situazioni di crash), occorre ricorrere al modello ad elementi finiti del corpo umano, già in fase di studio avanzato. Nella relazione vengono paragonati i risultati che si ottengono tenendo conto o meno dei passeggeri, e viene fatto naturalmente il confronto con un sistema di ammortizzazione passivo

## Qualche nota sui sistemi di ammortizzazione

I sistemi di ammortizzazione trattati in questa relazione hanno il compito di minimizzare i disturbi nella dinamica di un veicolo terrestre. I disturbi possono essere raccolti in 2 categorie: il disturbo “da strada” e quello “da massa”. Il disturbo da strada è costituito dalle vibrazioni che la strada trasmette al veicolo; può essere grande in modulo e a bassa frequenza, come un dosso, oppure piccolo in modulo, ma ad alta frequenza, come le vibrazioni trasmesse da una strada dissestata. Il disturbo da massa è dato dalle variazioni di carico dovute alle manovre (accelerazioni, frenate e curve). Si avranno quindi 2 tipi di segnali entranti nel sistema: uno di grande modulo e bassa frequenza e uno di piccolo modulo e alta frequenza. Un ammortizzatore passivo è generalmente morbido ai disturbi da strada e rigido contro i disturbi da massa. Spesso il progetto di un buon ammortizzatore passivo è un compromesso tra questi due obiettivi. Naturalmente un ammortizzatore attivo ben progettato ha migliori prestazioni di uno passivo e può notevolmente migliorare sia la sicurezza che il comfort: questi sono gli obiettivi dell’ottimizzazione.

- Un sistema passivo funziona senza che l’utilizzo di energia esterna e può essere modellizzato con un sistema massa-molla-smorzatore. Sono montati sulla maggior parte degli autoveicoli e non necessitano di un sistema di controllo feedback.

- Un sistema semi-attivo consente una dissipazione di energia controllata in tempo reale. Tale dissipazione viene ottenuta grazie ad uno smorzatore attivo in parallelo ad una molla convenzionale. Il vantaggio di questo tipo di ammortizzatore è la possibilità di variare lo smorzamento nonostante l’assenza di attuatore. Infatti lo smorzatore attivo è spesso costituito da un sistema fluido-meccanico che risponde ad un sistema di controllo feedback. Generalmente si utilizzano come smorzatori attivi cilindri-pistone a 2 camere, una riempita con del gas, l’altra con un fluido elettroreologico o magnetoreologico (ERF o MRF).

- Un sistema attivo necessita di una fonte di energia esterna per funzionare e di un sistema di controllo. Esso è costituito da attuatori idraulici o pneumatici in grado di fornire la forza desiderata. Gli attuatori sono collegati in parallelo con molle e smorzatori tradizionali. L’ammortizzazione attiva richiede sensori posti in vari punti del veicolo, in grado di leggere la dinamica del corpo. Questa informazione è utilizzata dal sistema di controllo per fornire l’esatta quantità di forza richiesta. In termini energetici un controllo attivo è molto costoso e per questo è importante in fase di progettazione considerare la potenza disponibile

## Gli obiettivi dell'ottimizzazione

In un qualsiasi sistema di ammortizzazione, vari fattori intervengono nell'ottimizzazione.

Generalmente nell'ottimizzazione ci si basa su un compromesso tra comfort e sicurezza. Esistono 4 importanti parametri di cui bisogna tenere conto quando ci si accinge a progettare un sistema di ammortizzazione:

- comfort: direttamente legato alle accelerazioni dei passeggeri, è sensibile ai disturbi ad alta frequenza e di modulo piccolo
- dinamica del corpo: direttamente legata alle accelerazioni dovute alle manovre (freno, acceleratore e sterzo), è sensibile quindi ai disturbi a bassa frequenza e grandi in modulo
- interazione ruota-strada: deve modellare correttamente le forze di contatto che creano la frizione sufficiente alle ruote per non slittare. Le forze di contatto sono assunte lineari con la deflessione della ruota
- spostamento della sospensione: la base di ogni sistema di ammortizzazione è trasferire lo spostamento della massa del veicolo allo spostamento del gruppo ruota-molla-smorzatore

Nessun sistema di ammortizzazione è in grado di ottimizzare tutti e 4 questi parametri simultaneamente, occorrerà perciò ricorrere ad un compromesso che si rifletterà nella scelta delle funzioni peso al momento dell'ottimizzazione

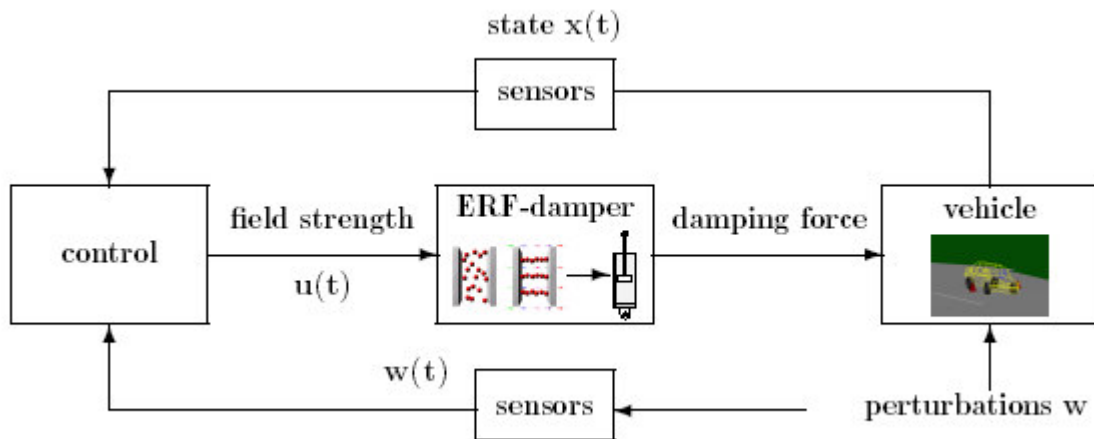
## **Cenni sull'ammortizzazione semi-attiva con fluido elettroreologico (ERF)**

L'ammortizzazione semi-attiva è spesso basata sul modello dinamico di un sistema di assorbimento degli urti che utilizza un fluido elettroreologico. Le proprietà di questi fluidi sono conosciute da più di 50 anni; fondamentalmente sono delle sospensioni colloidali in grado di cambiare rapidamente e in modo significativo la loro viscosità in seguito all'applicazione di un campo elettrico perpendicolare alla direzione del flusso. Un fenomeno analogo è costituito dai fluidimagnetoreologici, la cui viscosità dipende dall'applicazione di un campo magnetico. I bassi costi e il veloce tempo di risposta rendono i sistemi a ERF molto interessanti nel campo degli ammortizzatori semi-attivi.

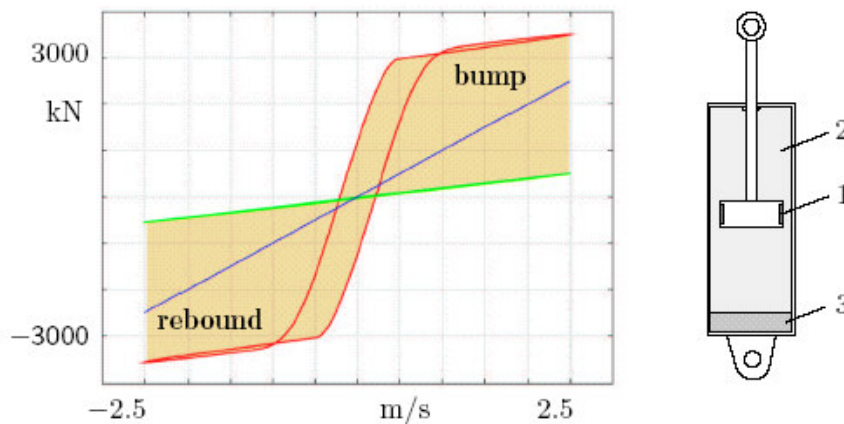
Sotto l'azione di un campo elettrico la variazione delle proprietà di un ERF è notevole: lo stato del materiale varia da fluido a bassa viscosità a quasi solido. Questa variazione può essere effettuata, sotto l'influenza dell'opportuno campo elettrico, in un tempo di 15 ms. Il fenomeno è causato dalla presenza di particelle polarizzabili immerse in un fluido non conduttore. I sistemi che utilizzano ERF rappresentano un'interfaccia eccellente tra le unità di controllo elettronico e le componenti meccaniche. L'interesse per questo tipo di tecnologia e gli studi che vi sono stati compiuti hanno reso possibile la realizzazione di un nuovo tipo di ERF per cui non esiste più il problema della stabilità nel lungo periodo dovuto alla sedimentazione delle particelle polarizzabili.

Vi sono due problemi fondamentali che sorgono quando si studia il controllo ottimo degli smorzatori a ERF e le loro applicazioni negli ammortizzatori per veicoli:

- la modellazione del comportamento del liquido in base al campo elettrico a cui è soggetto
- occorre un modello dinamico del veicolo che faccia presente cosa significhi esattamente "sicurezza e comfort", gli obiettivi che ci proponiamo di raggiungere col controllo

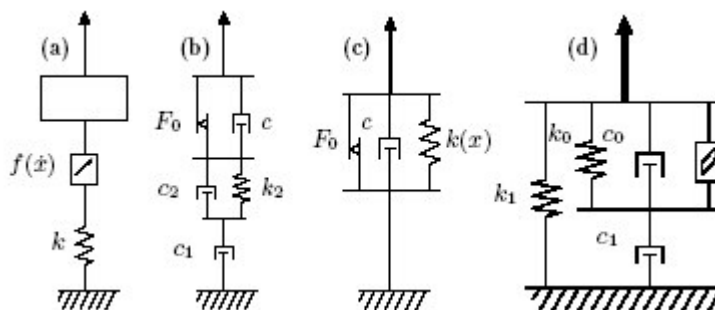


Nella figura seguente sono illustrate le caratteristiche principali di un sistema cilindro-pistone contenente gas ed ERF:



Nel grafico sono paragonate le prestazioni di un sistema convenzionale con molla e smorzatore a quelle di un sistema ERF. L'area sottesa dalle curve rappresenta lo smorzamento variabile di un sistema ERF, controllabile tramite l'applicazione di un campo elettrico. A destra, nello schema cilindro-pistone si possono riconoscere gli elettrodi montati sul pistone (1), la camera riempita di ERF (2), l'accumulatore a gas (3).

Sono stati studiati vari modelli per rappresentare la dinamica di un sistema ERF. Di seguito ne sono illustrati alcuni:



Le misure effettuate su smorzatori ERF presentano forti caratteristiche non lineari, cosicchè non si è ancora trovato un modello di sufficiente generalità adatto a rappresentare tale sistema. La maggior parte dei modelli che si utilizzano valgono per un campo di applicazione più ristretto di quello in cui un ammortizzatore ERF si trova a volte a lavorare. Generalmente si ricorre a rappresentare il moto del fluido con un flusso di Poiseuille laminare e incomprimibile, mentre per l'intero sistema si ricorre a elementi di frizione, molle e smorzatori non lineari. Uno dei modelli più utilizzati nel campo è il modello *Augmented Bouc-Wen* rappresentato in figura (d), ad opera di Spencer e altri. Esso descrive un sistema la cui dinamica è espressa dal sistema

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= \frac{1}{c_0 + c_1} (c_1 \dot{z}_D - \alpha s_2 - k_0 s_1) \\ \dot{s}_2 &= (A - \beta(1 + \text{sgn}(\dot{s}_1 s_2))s_2^2) \dot{s}_1\end{aligned}$$

che è, come si può notare, dipendente dalla velocità del pistone  $\dot{z}_D$ . La funzione in uscita è la forza di controllo  $F$ :

$$F = c_1(\dot{z}_D - \dot{s}_1) + k_1(z_D - z_0)$$

Il sistema rappresenta un operatore isteretico le cui proprietà sono parametrizzate attraverso l'azione di un campo elettrico, che entra a far parte nel sistema attraverso le equazioni

$$\begin{aligned}\dot{s}_3 &= \eta(w_D - s_3) & c_0 &= c_{01} + s_3 c_{02} \\ & & c_1 &= c_{11} + s_3 c_{12} \\ & & \alpha &= \alpha_1 + s_3 \alpha_2.\end{aligned}$$

Lo spazio degli stati è rappresentato attraverso il vettore  $\mathbf{s}$ . Per una rappresentazione più realistica è possibile ricorrere al vettore a 11 dimensioni

$$\mathbf{p} = (c_{11}, c_{01}, \alpha_1, A, \beta, c_{11}, c_{02}, \alpha_2, k_0, k_1, z_0, \eta)^T$$

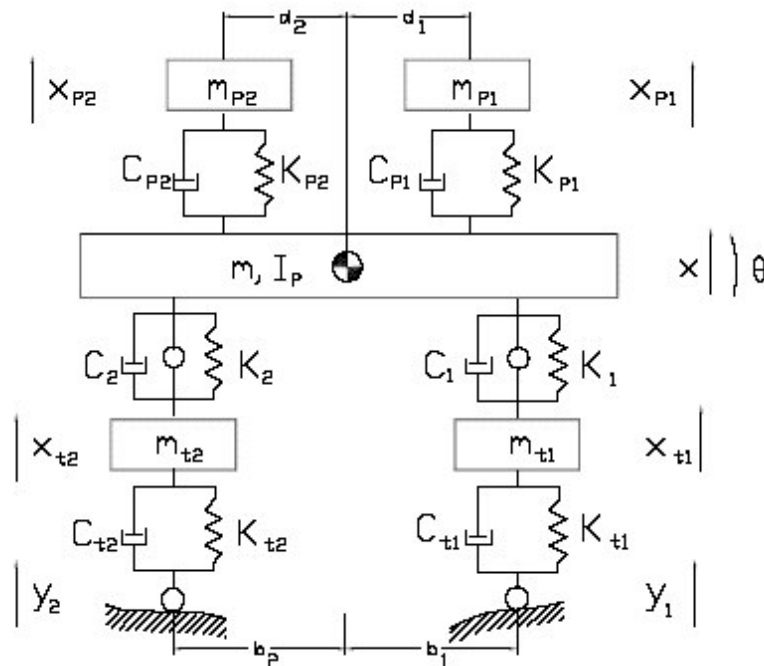


## Introduzione al sistema di controllo

Il controllo retroazionato agli stati è un potente mezzo per la progettazione del sistema di controllo che occorre in un sistema di ammortizzazione attivo o semi-attivo. La teoria del controllo ottimo lineare fornisce un approccio sistematico alla progettazione dei sistemi di sospensione. Tale approccio è stato usato per applicazioni del genere in vari campi. Si ricordano Sinha e Caudill, che hanno utilizzato questo metodo per progettare un sistema di ammortizzazione attivo per veicoli su rotaia; Esmailzadeh studiò un sistema di controllo per sospensioni attive pneumatiche per autoveicoli e Hrovat migliorò e attuò tale progetto; Shannan applicò la teoria del controllo ottimo lineare al problema del controllo laterale di autoveicoli e questo portò allo studio della stabilità laterale di grossi autoveicoli col conseguente impiego di ammortizzatori attivi negli autoarticolati

## Modello dinamico del veicolo

Il punto di partenza per realizzare un sistema di controllo per un ammortizzatore attivo è la conoscenza della dinamica del veicolo. I veicoli a motore sono sistemi complessi con un alto numero di gradi di libertà. Per rappresentare in modo esatto la cinematica non lineare della ruota, il meccanismo di sterzo e le forze di contatto al suolo sarebbe necessario un modello molto complesso e difficile da trattare. E' comunque possibile la formulazione di un modello più semplice in cui le approssimazioni compiute rientrano nelle equazioni sotto forma di disturbo del sistema ridotto.



La figura rappresenta lo schema di un modello *half car*, cioè un'autoveicolo visto di lato, con 6 gradi di libertà. Il modello è costituito da 2 passeggeri, dal corpo principale del veicolo e da 2 semiassi. Il moto è formato da 2 componenti, la traslazione verticale e il beccheggio. I collegamenti tra le masse sono fatti grazie a molle lineari in parallelo con smorzatori viscosi. Gli attuatori sono la sorgente di forza controllata, in parallelo con le molle e gli smorzatori situati tra la massa collegata ai semiassi e la massa del corpo principale. Si suppone che i passeggeri subiscano solo oscillazioni verticali. Per il modello del terreno si rimanda a pagina (quel che l'è)

Si riporta di seguito una tabella in cui sono indicati i significati dei simboli utilizzati, le unità di misura e i valori delle variabili utilizzati per l'ottenimento di risultati numerici. In fondo alla tabella sono elencati i 6 gradi di libertà, gli ingressi  $f$  e i disturbi  $y$

Not.	Description	Units	Values	Not.	Description	Units	Values
$I_p$	Body inertia	$Kg \cdot m^2$	3443.05	$m$	Body mass	$Kg$	1794.4
$m_{p1}$	Driver mass	$Kg$	75	$m_{p2}$	Passenger mass	$Kg$	75
$m_{t1}$	Front axle mass	$Kg$	87.15	$m_{t2}$	Rear axle mass	$Kg$	140.04
$k_1$	Front main stiffness	$N/m$	66824.2	$c_1$	F.m. damping	$\frac{Ns}{m}$	1190
$k_2$	Rear main stiffness	//	18615.0	$c_2$	R.m. damping	//	1000
$k_{p1}$	Front seat stiffness	//	14000	$c_{p1}$	F.s. damping	//	50.2
$k_{p2}$	Rear seat stiffness	//	14000	$c_{p2}$	R.s. damping	//	62.1
$k_{t1}$	Front tire stiffness	//	101115	$c_{t1}$	F.t. damping	//	14.6
$k_{t2}$	Rear tire stiffness	//	101115	$c_{t2}$	R.t. damping	//	14.6
$b_1$	Dimension	$m$	1.271	$b_2$	Dimension	$m$	1.713
$d_1$	Dimension	$m$	0.481	$d_2$	Dimension	$m$	1.313
$x$	Body bounce	$m$		$x_{t1}$	F.t. deflection	$m$	
$\theta$	Body pitch	$rad$		$x_{t2}$	R.t. deflection	$m$	
$x_{p1}$	Driver bounce	$m$		$f_1, f_2$	Input forces	$N$	
$x_{p2}$	Passenger bounce	$m$		$y_1, y_2$	Road disturbances	$m$	

Le equazioni che descrivono il comportamento del sistema sono:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{1}{m}(k_1 + k_2 + k_{p1} + k_{p2})x - \frac{1}{m}(k_1 b_1 - k_2 b_2 + k_{p1} d_1 - k_{p2} d_2)\theta \\
&\quad + \frac{k_{p1}}{m}x_{p1} + \frac{k_{p2}}{m}x_{p2} + \frac{k_1}{m}x_{t1} + \frac{k_2}{m}x_{t2} + \frac{c_{p1}}{m}\dot{x}_{p1} + \frac{c_{p2}}{m}\dot{x}_{p2} + \frac{c_1}{m}\dot{x}_{t1} + \frac{c_2}{m}\dot{x}_{t2} \\
&\quad - \frac{1}{m}(c_1 + c_2 + c_{p1} + c_{p2})\dot{x} - \frac{1}{m}(c_1 b_1 - c_2 b_2 + c_{p1} d_1 - c_{p2} d_2)\dot{\theta} + \frac{f_1 + f_2}{m} \\
\ddot{\theta} &= -\frac{1}{I_p}(k_1 b_1 - k_2 b_2 + k_{p1} d_1 - k_{p2} d_2)x - \frac{1}{I_p}(k_1 b_1^2 + k_2 b_2^2 + k_{p1} d_1^2 + k_{p2} d_2^2)\theta \\
&\quad - \frac{k_{p1} d_1}{I_p}x_{p1} + \frac{k_{p2} d_2}{I_p}x_{p2} - \frac{k_1 b_1}{I_p}x_{t1} + \frac{k_2 b_2}{I_p}x_{t2} \\
&\quad - \frac{1}{I_p}(c_1 b_1 - c_2 b_2 + c_{p1} d_1 - c_{p2} d_2)\dot{x} - \frac{1}{I_p}(c_1 b_1^2 + c_2 b_2^2 + c_{p1} d_1^2 + c_{p2} d_2^2)\dot{\theta} \\
&\quad - \frac{c_{p1} d_1}{I_p}\dot{x}_{p1} + \frac{c_{p2} d_2}{I_p}\dot{x}_{p2} - \frac{c_1 b_1}{I_p}\dot{x}_{t1} + \frac{c_2 b_2}{I_p}\dot{x}_{t2} + \frac{1}{I_p}(f_1 b_1 - f_2 b_2) \\
\ddot{x}_{p1} &= \frac{1}{m_{p1}}(k_{p1}x + k_{p1}d_1\theta - k_{p1}x_{p1}) + \frac{1}{m_{p1}}(c_{p1}\dot{x} + c_{p1}d_1\dot{\theta} - c_{p1}\dot{x}_{p1}) \\
\ddot{x}_{p2} &= \frac{1}{m_{p2}}(k_{p2}x - k_{p2}d_2\theta - k_{p2}x_{p2}) + \frac{1}{m_{p2}}(c_{p2}\dot{x} - c_{p2}d_2\dot{\theta} - c_{p2}\dot{x}_{p2}) \\
\ddot{x}_{t1} &= \frac{1}{m_{t1}}(k_1x + k_1b_1\theta - (k_1 + k_{t1})x_{t1} + k_{t1}y_1 - f_1) \\
&\quad + \frac{1}{m_{t1}}(c_1\dot{x} + c_1b_1\dot{\theta} - (c_1 + c_{t1})\dot{x}_{t1} + c_{t1}\dot{y}_1) \\
\ddot{x}_{t2} &= \frac{1}{m_{t2}}(k_2x - k_2b_2\theta - (k_2 + k_{t2})x_{t2} + k_{t2}y_2 - f_2) \\
&\quad + \frac{1}{m_{t2}}(c_2\dot{x} - c_2b_2\dot{\theta} - (c_2 + c_{t2})\dot{x}_{t2} + c_{t2}\dot{y}_2)
\end{aligned}$$

Il sistema può essere scritto in forma matriciale

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{w}$$

con

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{x}_1 = [x, \theta, x_{p1}, x_{p2}, x_{t1}, x_{t2}]^T$$

Il vettore  $\mathbf{u}$  rappresenta le forze dei 2 attuatori, mentre il vettore  $\mathbf{w}$  rappresenta i disturbi dovuti alla strada

$$\mathbf{u} = [f_1, f_2]^T ; \quad \mathbf{w} = [y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2]^T$$

La matrice  $\mathbf{A}$  può essere scritta nella seguente forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_1 = [\mathbf{0}]_{6 \times 6} ; \quad \mathbf{A}_2 = [\mathbf{I}]_{6 \times 6}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{k_1+k_2+k_{p1}+k_{p2}}{m} & -\frac{k_1 b_1 - k_2 b_2 + k_{p1} d_1 - k_{p2} d_2}{m} & \frac{k_{p1}}{m} & \frac{k_{p2}}{m} & \frac{k_1}{m} & \frac{k_2}{m} \\ -\frac{k_1 b_1 - k_2 b_2 + k_{p1} d_1 - k_{p2} d_2}{I_p} & -\frac{k_1 b_1^2 + k_2 b_2^2 + k_{p1} d_1^2 + k_{p2} d_2^2}{I_p} & \frac{k_{p1} d_1}{I_p} & -\frac{k_{p2} d_2}{I_p} & \frac{k_1 b_1}{I_p} & -\frac{k_2 b_2}{I_p} \\ \frac{k_{p1}}{m_{p1}} & \frac{k_{p1} d_1}{m_{p1}} & -\frac{k_{p1}}{m_{p1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{p2}}{m_{p2}} & -\frac{k_{p2} d_2}{m_{p2}} & 0 & -\frac{k_{p2} d_2}{m_{p2}} & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_{t1}} & \frac{k_1 b_1}{m_{t1}} & 0 & 0 & -\frac{k_1+k_{t1}}{m_{t1}} & 0 \\ \frac{k_2}{m_{t2}} & -\frac{k_2 b_2}{m_{t2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{k_2+k_{t2}}{m_{t2}} \end{bmatrix}$$

mentre la matrice  $\mathbf{A}_4$  è come la matrice  $\mathbf{A}_3$ , con la sola differenza che invece delle rigidezze  $k$  si hanno gli smorzamenti  $c$

La matrice  $\mathbf{B}$  ha la seguente forma:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{6 \times 2} \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \frac{b_1}{I_p} & -\frac{b_2}{I_p} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{m_{t1}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_{t2}} \end{bmatrix}$$

La matrice dei disturbi da strada  $\mathbf{G}$  ha la seguente forma:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}]_{10 \times 4} \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} \frac{k_{t1}}{m_{t1}} & 0 & \frac{c_{t1}}{m_{t1}} & 0 \\ 0 & \frac{k_{t2}}{m_{t2}} & 0 & \frac{c_{t2}}{m_{t2}} \end{bmatrix}$$

Questo set di matrici rappresenta le equazioni di stato nella forma standard richiesta per effettuare il progetto di un controllo ottimo lineare

## Il progetto del controllo ottimo

Come indicato nel paragrafo sugli obiettivi dell'ottimizzazione, i fattori importanti il progetto di un sistema di controllo per l'ammortizzazione sono *comfort* (rappresentato dall'accelerazione dei passeggeri), *interazione ruota-strada* (rappresentata dai disturbi), *dinamica del corpo e spostamento della sospensione* (rappresentata dagli stati del sistema). L'ottimizzazione consiste nella minimizzazione di queste quantità. Viene effettuato un controllo proporzionale agli stati con  $\mathbf{u} = -\mathbf{K} \mathbf{x}$ , in cui  $\mathbf{K}$  è la matrice dei guadagni. Si assume che tutti gli stati siano noti e misurati esattamente. La procedura di ottimizzazione consiste nel determinare  $\mathbf{u}$  in modo da minimizzare il funzionale  $\mathbf{J}$ , contenente gli stati  $\mathbf{x}$  e gli ingressi  $\mathbf{u}$  moltiplicati per opportuni pesi, che ci permettono di spostare l'attenzione tra stati e ingressi, di modo da rispettare i limiti fisici e tecnologici (infatti sia gli stati che gli ingressi pongono dei limiti, per citarne uno fondamentale nel progetto, la saturazione degli attuatori). Si sono presi in considerazione 2 modi di procedere, già citati nell'*Introduzione*

## Conventional Method (CM)

Questo metodo non tiene conto delle accelerazioni dei passeggeri. E' il metodo che predilige la sicurezza al comfort, in quanto la sicurezza è legata all'aderenza delle ruote alla strada, cioè allo spostamento del semiasse. Il funzionale è scritto nella forma standard

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

in cui  $\mathbf{Q}$  ed  $\mathbf{R}$  sono le matrici peso simmetriche e definite positive. Per ottenere un ingresso  $\mathbf{u}$  è necessario che il sistema LTI sia stabilizzabile, cioè che i modi instabili siano controllabili. In questo caso non si hanno modi instabili, poichè gli autovalori di  $\mathbf{A}$  sono tutti nel semipiano sinistro, dunque sarà sempre possibile ottenere una soluzione per il controllo ottimo. La matrice di guadagno  $\mathbf{K}$  si calcola grazie alla formula  $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$ , con  $\mathbf{P}$  soluzione dell'equazione algebrica di Riccati

$$\mathbf{A} \mathbf{P} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

Il sistema controllato in anello chiuso che verrà simulato sarà

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{x} + \mathbf{G} \mathbf{w}$$

## Acceleration Dependent Method (ADM)

Con questo metodo sono considerate anche le accelerazioni dei passeggeri, si ha dunque un indice del loro comfort, che può essere più o meno importante grazie alle funzioni peso. Solitamente più è importante il comfort dei passeggeri, più si danneggia la sicurezza del veicolo in termini di aderenza delle ruote al terreno. Il vettore  $\mathbf{z}$  rappresenta le accelerazioni dei passeggeri ed è definito

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{p1} \\ \ddot{x}_{p2} \end{bmatrix}$$

esso rientra nel funzionale nella forma

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{z}^T \mathbf{S} \mathbf{z}) dt \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

perciò il funzionale diventa

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \ddot{x}_{p1}^T S_1 \ddot{x}_{p1} + \ddot{x}_{p2}^T S_2 \ddot{x}_{p2}) dt$$

Le accelerazioni dei passeggeri possono essere riscritte come linearmente dipendenti dagli stati del sistema nella seguente forma:

$$\ddot{x}_{p1} = \mathbf{v}_1 \mathbf{x} \quad ; \quad \ddot{x}_{p2} = \mathbf{v}_2 \mathbf{x}$$

con i vettori  $\mathbf{v}$  rappresentati da

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{m_{p1}} [k_{p1} \quad k_{p1}d_1 \quad -k_{p1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{p1} \quad c_{p1}d_1 \quad -c_{p1} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{m_{p2}} [k_{p2} \quad k_{p2}d_2 \quad -k_{p2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad c_{p2} \quad c_{p2}d_2 \quad -c_{p2} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Il funzionale viene ora riscritto

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{v}_1^T S_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T S_2 \mathbf{v}_2) \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

oppure nella semplice forma

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q}_n \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q} + \mathbf{v}_1^T S_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T S_2 \mathbf{v}_2$$

In questo modo ci si è ricondotti alla forma di soluzione adottata nel precedente paragrafo, che prevede l'uso dell'ARE

## Determinazione delle funzioni peso $Q$ ed $R$

L'ottenimento della soluzione è direttamente legato alla corretta determinazione delle matrici peso  $Q$  ed  $R$ . In questo caso un modo ragionevole di determinare le funzioni peso è quello di imporre un limite alla libertà degli stati. Considerando la sola matrice  $Q$  (per  $R$  si fa la stessa cosa), si scrive la matrice nella forma  $Q = W N$ , dove  $W$  rappresenta un vettore riga di pesi adimensionali adimensionali, mentre  $N$  è un vettore colonna così composto:

$$N = \left( \frac{1}{\max(x_1)}, \frac{1}{\max(x_2)}, \dots, \frac{1}{\max(x_n)} \right)$$

Sia  $W$  che  $N$  hanno come numero di elementi il numero degli stati del sistema. Imponendo questo vincolo sugli stati il controllo ottimo garantirà un'azione energica sugli stati più limitati. Altro vantaggio di questo modo di determinare le funzioni peso è il fatto che sono resi confrontabili stati che avrebbero differenti dimensioni, in quanto il vettore  $N$  adimensionalizza gli stati. Si avrebbe il problema di non conoscere il comportamento durante il transitorio; basta ritoccare le funzioni peso per risolvere il problema, ma generalmente una scelta accurata delle rigidità e degli smorzatori garantisce una buona dinamica anche sotto l'azione del sistema di controllo.

## La superficie stradale

Sin dagli inizi degli studi compiuti sulla dinamica degli autoveicoli ci si rese conto che i semplici ingressi di impulso, scalino, rampa, onda sinusoidale e loro combinazioni non potevano ovviamente rappresentare gli ingressi corrispondenti a quelli di una superficie scabra come quella stradale. Nemmeno i profili irregolari di natura deterministica si avvicinavano in modo sufficiente alla realtà. Per generare un profilo che rappresenti la superficie stradale si ricorre agli strumenti della statistica. La frequenza di eccitazione fornita dal profilo sarà poi proporzionale alla velocità di traslazione del veicolo. Gli strumenti base per descrivere le proprietà di dati random sono 4:

- deviazione standard (root mean square deviation)
- funzione densità di probabilità
- funzione di autocorrelazione
- funzione densità di potere spettrale (power spectral function density function, PSD)

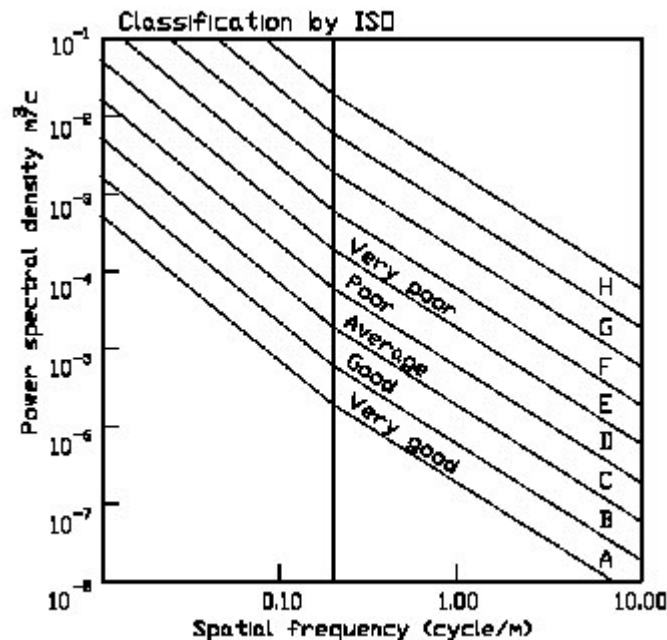
Porremo l'attenzione su quest'ultima caratteristica

La PSD rappresenta la variazione del valore medio rispetto alla frequenza. Si stima facendo il valor medio in una ristretta banda di frequenze (spesso per estrarre i valori si utilizzano filtri a spillo), poi si divide tale valore per la banda di frequenza. La funzione PSD deve soddisfare in ampiezza e frequenza i disturbi che la strada può fornire alla dinamica di un autoveicolo. Poiché i disturbi sono dovuti ad una irregolarità spaziale del terreno, è opportuno definire la PSD in termini di frequenza spaziale, cioè in cicli  $\Omega$  (cicli/m), piuttosto che in termini di frequenza temporale (cicli/sec). La PSD si esprime tramite la relazione

$$S_y(\Omega) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{X} \left[ \int_0^X y(x) e^{-2\pi i \Omega x} dx \right]^2$$

dove  $X$  è la lunghezza totale della corsa,  $y(x)$  è l'espressione dell'altezza del profilo

Sono stati fatti molti tentativi di fare un modello della superficie stradale e di classificarne il grado di scabrosità. In questa relazione sono stati considerati i valori ISO in termini di PSD, rappresentati nella seguente tabella





Di seguito si riporta un'altra tabella ISO, dalla quale si è utilizzato il modello D (poor) per la simulazione

Degree of Roughness $S(\Omega) \times 10^{-6}$		
Road Class	Range	Geometric mean
A (Very good)	< 8	4
B (Good)	8 – 32	16
C (Average)	32 – 128	64
D (Poor)	128 – 512	256
E (Very poor)	512 – 2048	1024
F	2048 – 8192	4096
G	8192 – 32768	16384
h	32768 <	

### Risultati della simulazione

Una volta individuato un segnale random adatto per rappresentare la strada, occorre determinare le funzioni peso che occorrono per le funzioni **Q** ed **R**. La stima delle limitazioni al movimento degli stati è un lavoro delicato che richiede analisi statistiche per stimare cosa intende il passeggero medio per comfort e la conoscenza approfondita sistema, in particolare cose come saturazione degli attuatori, potenza disponibile, transitorio. Si ricorda in particolare che l'utilizzo di pesi che impongono limiti al movimento degli stati impediscono la conoscenza del transitorio del sistema, di cui perciò si dovrà avere un'idea qualitativa. In questi casi l'esperienza del progettista gioca un ruolo determinante. In questa relazione, non essendo in possesso di un sistema particolare, ma solo di un modello generale, i limiti imposti agli stati sono stati stimati e raccolti nella seguente tabella:

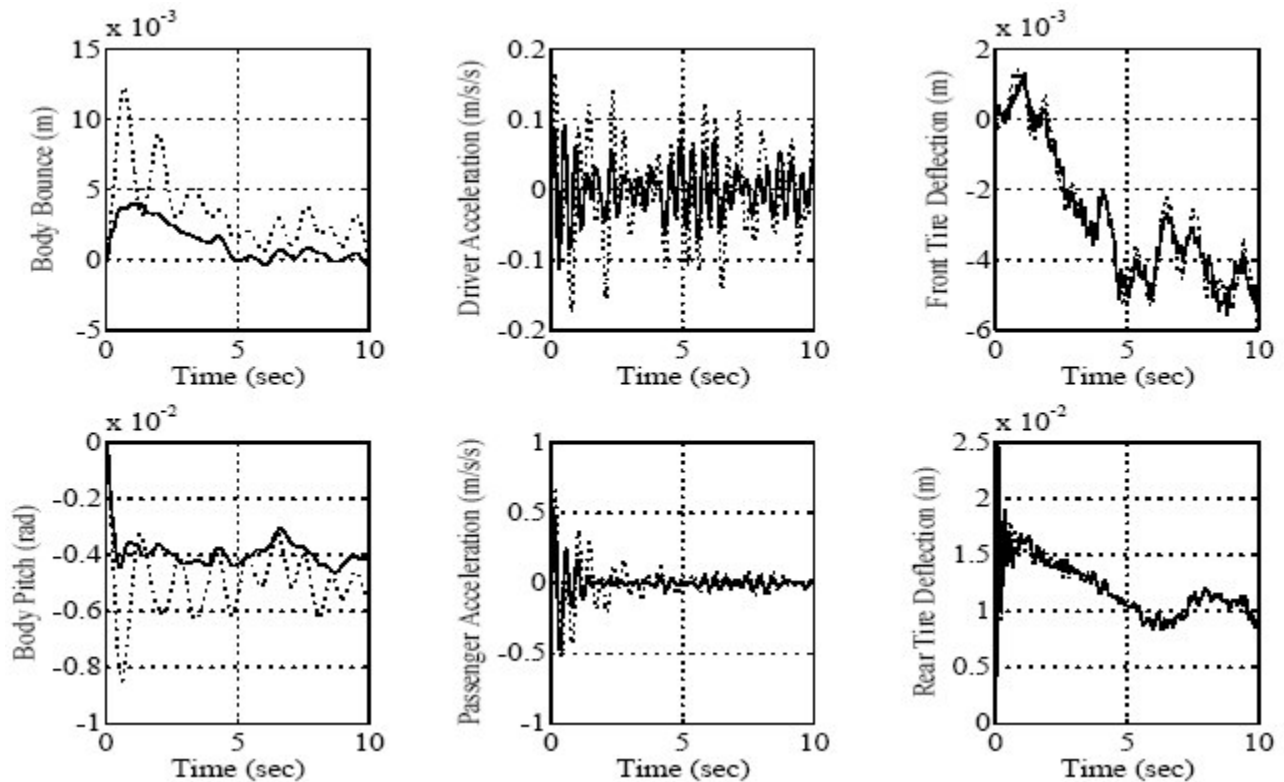
Variables	$x$	$\theta$	$x_{p1}$	$x_{p2}$	$x_{t1}$	$x_{t2}$	$\ddot{x}_{p1}$	$\ddot{x}_{p2}$	$f_1$	$f_2$
Limits	0.01	0.05	0.01	0.01	0.05	0.05	0.2 % g	0.2 % g	500	500

Questi dati serviranno a scrivere le matrici **Q** ed **R**. La simulazione verrà eseguita in ambiente Matlab, scrivendo le matrici rappresentanti il sistema LTI e avvalendosi del comando ARE per il calcolo della soluzione dell'equazione di Riccati per il controllo ottimo

Verrà effettuato un confronto tra l'ammortizzatore passivo e tra quello attivo con sistema di controllo progettato con CM o ADM. Nella seguente tabella sono illustrati gli autovalori del sistema nelle tre modalità:

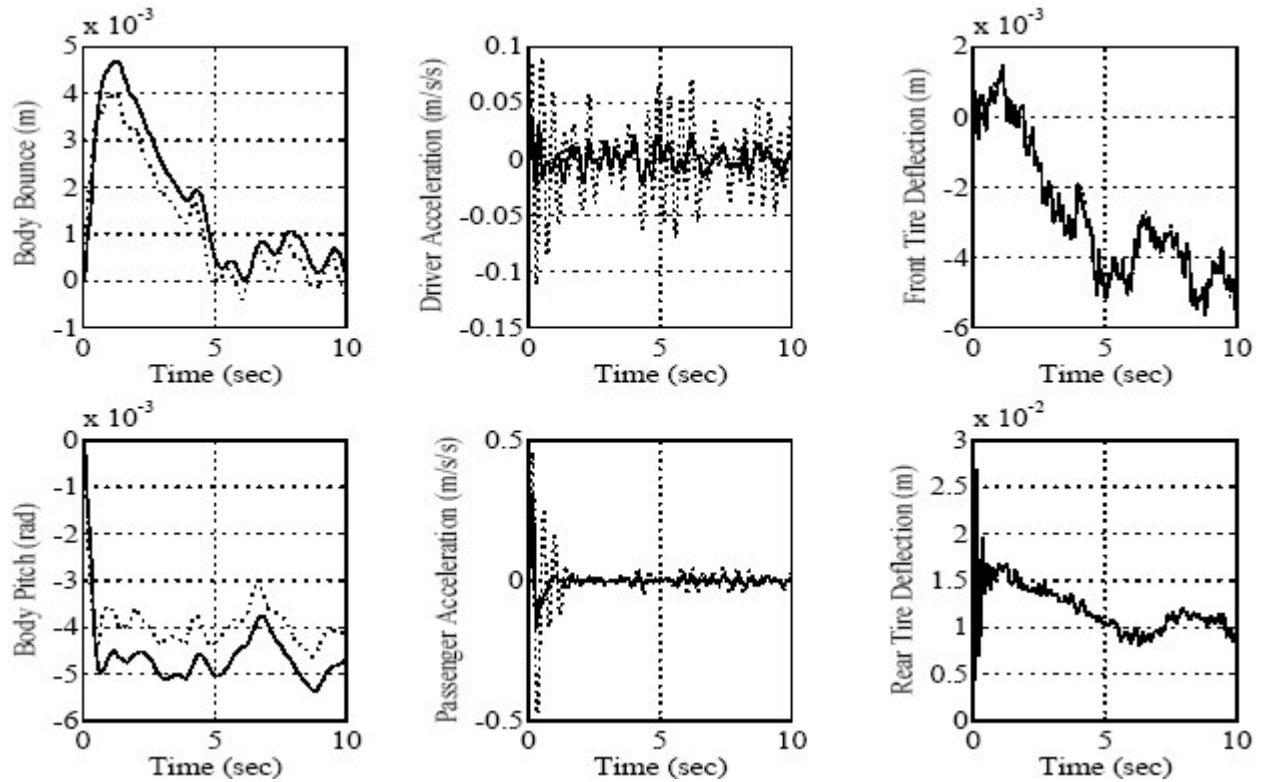
Eigenvalues		
Passive	CM	ADM
$-7.2816 \pm 43.450i$	$-7.4018 \pm 43.471i$	$-7.6619 \pm 43.290i$
$-3.8335 \pm 28.927i$	$-4.0476 \pm 5.2762i$	$-7.3851 \pm 17.502i$
$-0.4704 \pm 14.369i$	$-3.9100 \pm 28.937i$	$-5.6742 \pm 16.084i$
$-0.3769 \pm 13.919i$	$-2.1579 \pm 6.3594i$	$-3.9036 \pm 28.474i$
$-0.4408 \pm 4.4572i$	$-1.3747 \pm 14.710i$	$-3.2958 \pm 4.1821i$
$-0.2146 \pm 6.2596i$	$-0.8846 \pm 14.059i$	$-2.4407 \pm 4.9177i$

Come si può notare dalla tabella il sistema progettato con ADM risulta avere dinamica più veloce. Si riportano di seguito i grafici rappresentanti i 6 stati del sistema. La linea continua rappresenta un ammortizzatore attivo CM, quella tratteggiata uno passivo



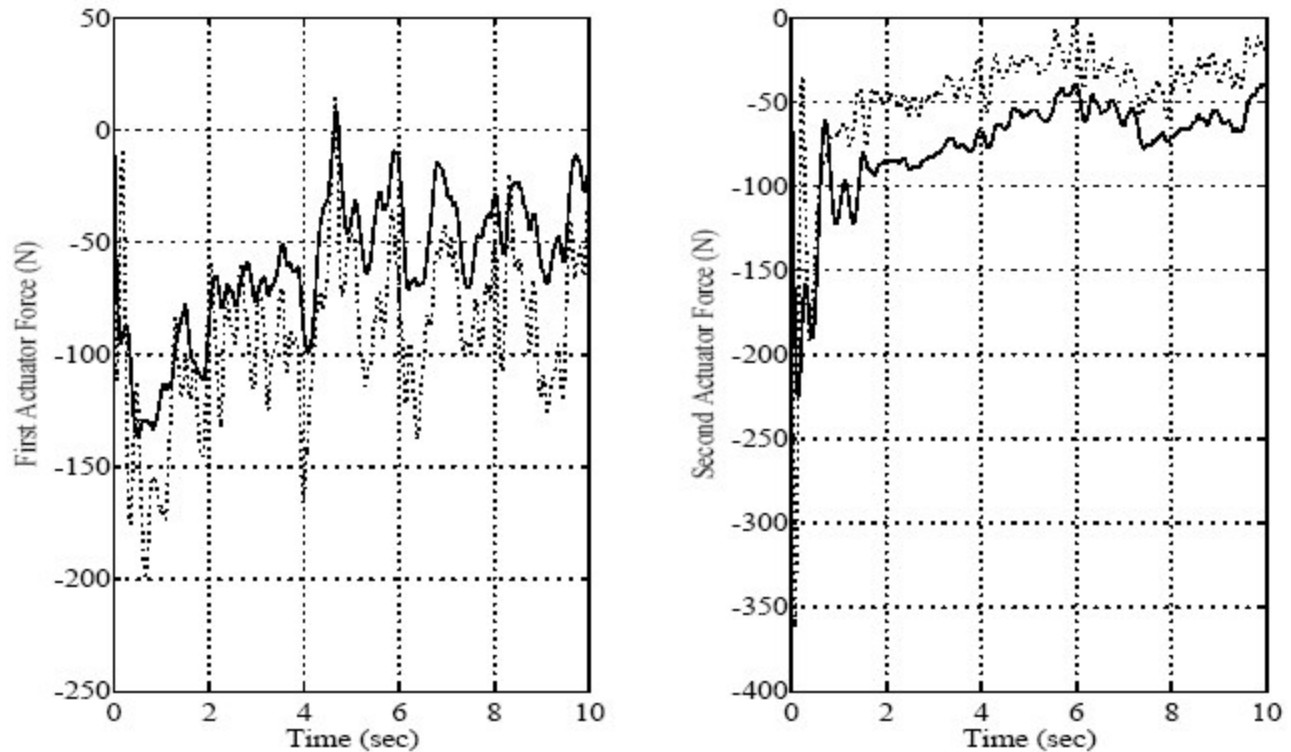
Si può notare come dal punto di vista della sicurezza rappresentata dallo spostamento verticale degli pneumatici, anche un sistema passivo sia sufficiente. Tuttavia per quanto riguarda tutte le altre variabili di stato, è auspicabile un sistema di ammortizzazione attivo.

Di seguito sono rappresentati i grafici che confrontano un sistema CM (in linea tratteggiata) e uno ADM (in linea continua):



Si nota che in entrambi i casi la corsa verticale delle ruote è simile. Dal punto di vista dell'aderenza dello pneumatico alla strada, le due metodologie di progetto conducono agli stessi risultati di sicurezza. Per quanto riguarda il comfort dei passeggeri l'ADM è molto superiore al CM. Per quanto riguarda il moto del corpo principale dell'autoveicolo, sebbene il CM fornisca prestazioni leggermente migliori nel controllo del moto verticale rispetto all'ADM, quest'ultimo controlla molto meglio il beccheggio del CM.

Nel grafico di seguito viene rappresentata la forza di controllo che i due attuatori debbono fornire, anche qui viene rappresentato l'ADM con la linea continua, mentre il CM con quella tratteggiata:



Si può notare che in entrambi i casi gli attuatori soddisfano ampiamente i limiti tecnologici, in particolare le prestazioni migliori sono garantite da un ADM

## Conclusioni

Emerge dalla simulazione e dal confronto del sistema con ammortizzatore passivo con quello attivo, progettato con CM e ADM, che una sospensione attiva ben progettata migliora le prestazioni di un autoveicolo in sicurezza e comfort. In particolare il progetto con ADM rappresenta il migliore tra i due casi di controllo attivo presentati. Sebbene il modello su cui sia basato questo lavoro sia molto semplice, esso presenta risultati simili ad altri lavori del genere trovati in rete, svolti con sistemi più dettagliati e complessi, principalmente modellati con schemi ad elementi finiti. La procedura con cui si progetta il sistema di controllo agli stati di un sistema lineare tempo invariante è infatti sempre la stessa, indipendentemente dal numero di gradi di libertà del sistema. Cambia solo il numero degli stati.

## **Bibliografia**

D.Hrovat - Optimal active suspension structures for quarter car vehicle models, 1990 (pag.845-860)

ISO - Reporting vehicle road surface irregularities. Technical report TC108/SC2/WG4, 1982

R.Sharp and S.Hassan - The relative performance of passive, active and semi active car suspension systems. Proc.of the Institution of Mechanical Engineers, 1986 (pag.219-238)

Uwe Rettig and Oskar von Stryk – Abstract: Numerical optimal control strategies for semi-active vehicle suspension with electrorheological fluid dampers (pag. 6-8)

Proceedings of the 1999 FEE International Conference on Control Applications – Active suspension control using a novel strut and active filtered feedback: Design and Implementation

Henri Gavin - Abstract: Implementation and Modeling of a Semi-Active Control System